# Plenumsregning uke 5

1) Basis: En samling S av vektorer i et vektorrom V kalles en basis for V hvis samlingen S er lineært uavhengig og V = span S.

a) Ikke en basis. 4 vektorer i et vektorrom med 3 dimensjoner er alltid lineært avhengige. (Dette gjelder generelt når du har flere vektorer enn dimensjoner)

b) Sjekker om vektorene er lineært uavhengige:
⇝ Putter vektorene som kolonner i en matrise, og sjekker determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 3 - 6 = -2 \neq 0$$

Siden determinanten er ulik 0 er kolonnene lineært uavhengige, og dermed danner en basis.

c) (Kan sjekke at determinanten her blir 0)
Ser at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Altså finnes en lineærkombinasjon som blir $\vec{0}$, hvor ikke alle koeffisientene er 0. Dermed er vektorene lineært avhengige og ikke en basis.

d) Ikke en basis: For få vektorer til å danne en basis for $\mathbb{R}^3$.

2) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$

a) Vi sjekker de tre punktene fra teorem 6 (s. 201 bind 2)

- Nullvektoren er $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Oppfyller den $A^T = -A$?

  Ja, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Så $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$.

- Lukket under addisjon?

  Anta $A, B \in U$, altså $A^T = -A$ og $B^T = -B$.

  Ønsker å vise at $A + B \in U$

  $(A + B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A + B)$

  Dermed er $A + B \in U$

- Lukket under skalarmultiplikasjon?

  Anta $A \in U$ og $r \in \mathbb{R}$. Ønsker $rA \in U$

  $(rA)^T = rA^T = r(-A) = -(rA)$

  Dermed er $rA \in U$

$U$ er altså et underrom av $M_2(\mathbb{R})$.

b) Finne basis for U:

La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

For at $A \in U$, må $A^T = -A$, altså

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=-a, & c=-b \\ d=-d & \end{matrix}$$

$\Rightarrow a = 0,\ c = -b,\ d = 0$

Så matriser i U er på formen $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for U

(Her er det uendelig riktige svar, f.eks. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ )

$\dim U = 1$, siden det er ett element i basisen.

3) $T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(0) \end{bmatrix}$.

La $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\leadsto (p+q)(x) = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

$\leadsto (\alpha p)(x) = \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0$

- Bevarer addisjon:

$$T(p+q) = \begin{bmatrix} (p+q)(1) \\ (p+q)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+b_2+a_1+b_1+a_0+b_0 \\ a_0+b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2+a_1+a_0 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2+b_1+b_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$= T(p) + T(q)$$

• Bevarer skalarmultiplikasjon:

$$T(\alpha p) = \begin{bmatrix} \alpha a_2 + \alpha a_1 + \alpha a_0 \\ \alpha a_0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_2 + a_1 + a_0 \\ a_0 \end{bmatrix} = \alpha T(p)$$

$T$ bevarer addisjon og skalarmultiplikasjon, og er dermed en lineærtransformasjon.

b) $\text{Ker } T = \left\{ p \in \mathbb{P}_2 \mid T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

La $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

$p \in \text{Ker } T$ hvis $T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, det gir

$$T(p) = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 + a_0 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_2 = -a_1, \quad a_0 = 0$

Så polynomer i kjernen er på formen

$p(x) = a_2x^2 - a_2x = a_2(x^2 - x)$

$\Rightarrow \{x^2 - x\}$ er en basis for $\text{Ker } T$.

4) $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Kjernen: $\text{Ker } T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0, \; d = 0$

$\Rightarrow \text{Ker } T = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Rekkevidden: $\operatorname{Ran} T = \left\{ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$

(ofte kalt "bildet" til $T$, $\operatorname{Im} T$ "image")

Har $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, så vi får

at $\operatorname{Ran} T = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Injektiv: nei, vi ser at $\operatorname{Ker} T \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

↳ Tolkning: mange matriser sendes til samme matrise

Surjektiv: nei, vi ser at $\operatorname{Ran} T \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

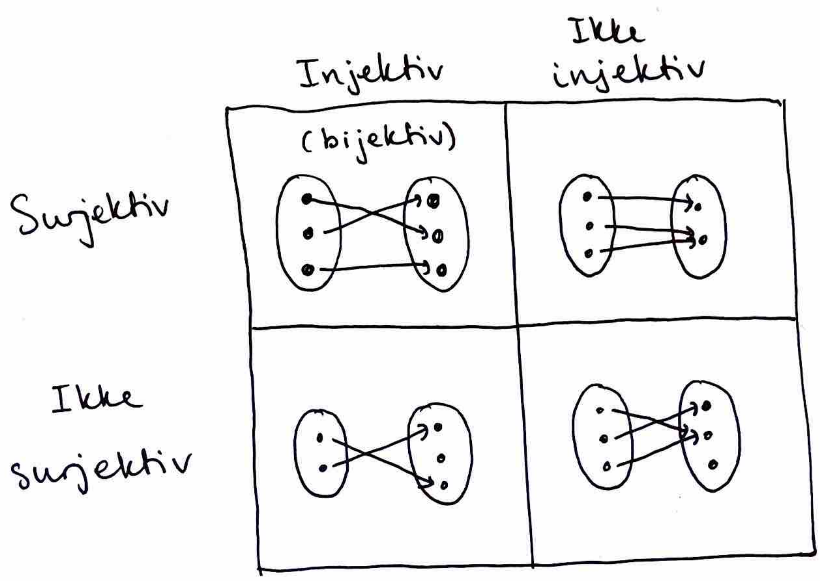
↳ Tolkning: vi "treffer" ikke alle 2x2-matriser med $T$, kun de med 0 utenfor diagonalen.

obs: her skrev jeg feil på tavla på tirsdag. Skrev $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{ran} T$, mente $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{ran} T$

---

Kjerne, rekkevidde, injektiv og surjektiv, $T : U \to V$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Injektiv:} & \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\} \\ \text{Surjektiv:} & \operatorname{Ran} T = V \\ \text{Bijektiv:} & \text{Injektiv og surjektiv} \end{array}}$$




← dette er for generelle funksjoner, ikke bare lineære