Plenumsregning uke 7

1) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

(merk at dette er samme transformasjon som i siste oppgave forrige gang)

Starter med å finne koordinater mhp B:

$$\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Skal finne en 4×4-matrise $[T]_B$ som er slik at $[T]_B \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$.

Denne finner vi ved å lese av

↳ skalarproduktet mellom første rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ er a

— " — andre rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ er 0

— " — tredje rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ er 0

— " — fjerde rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ er d

Dermed får vi $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2a) Hva gjør T med en generell vektor $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ $\left([\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right)$

$$T(\vec{x}) = T(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$$

$$= a\,T(\vec{u}) + b\,T(\vec{v}) + c\,T(\vec{w})$$

$$= a(2\vec{u} - 4\vec{w}) + b(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + c(-2\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v})$$

$$= (2a + b - 2c)\vec{u} + (b + \tfrac{c}{2})\vec{v} + (-4a + b)\vec{w}$$

$$\Rightarrow [T(\vec{x})]_B = \begin{bmatrix} 2a + b - 2c \\ b + \frac{c}{2} \\ -4a + b \end{bmatrix}$$

Skal finne $[T]_B$ slik at $[T(\vec{x})]_B = [T]_B [\vec{x}]_B$

Skalarprodukt mellom første rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ er $2a + b - 2c$

andre rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ er $b + \frac{c}{2}$

tredje rad og $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ er $-4a + b$

Dette gir $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Finn $[T(\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v})]_B$

obs! Rekkefølge på elementer i basis

Har $[\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Da får vi

$$[T(\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v})]_B = [T]_B \, [\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v}]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$

c) Bruker at $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Null} [T]_B$, så vi finner nullrommet til $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, altså løser $[T]_B \, [\vec{x}]_B = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -11/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{x}]_B = \vec{0}$$

Dermed er $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$.

For å finne rekkevidde, bruker vi rangteoremet:

$$\dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Ran} T) = \dim V$$

Har at $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$, $\dim V = 3$, så

da må $\dim(\operatorname{Ran} T) = 3$.

Altså er $\operatorname{Ran} T$ ~~et~~ underrom av V med 3 dimensjoner,

og må dermed være ~~lik~~ hele V.

$$\Rightarrow \operatorname{Ran} T = V$$

$\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\} \Rightarrow T$ injektiv

$\operatorname{Ran} T = V \Rightarrow T$ surjektiv

3) $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. $\operatorname{span}\{\vec{v}\} = \{a\vec{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$

Merk at $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$ ligger i $\operatorname{span}\{\vec{v}\}$,

siden $\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ er et tall.

ligger nærmest = minst avstand til

Fremgangsmåte: se på avstanden mellom $\vec{u}$ og en generell vektor $a\vec{v}$ i $\operatorname{span}\{\vec{v}\}$, og vise at når avstanden er minst mulig så har vi at $a = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

La $a\vec{v} \in \text{span}\{\vec{v}\}$. Avstanden mellom $\vec{u}$ og $a\vec{v}$ er $\|\vec{u} - a\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{u} - a\vec{v}, \vec{u} - a\vec{v}\rangle}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\vec{u} - a\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} - a\vec{v}, \vec{u} - a\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u} - a\vec{v}, \vec{u}\rangle - a\langle \vec{u} - a\vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - a\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle - a\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + a^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= a^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle - 2a\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle
\end{aligned}$$

La $f(a) = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle a^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle a + \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$

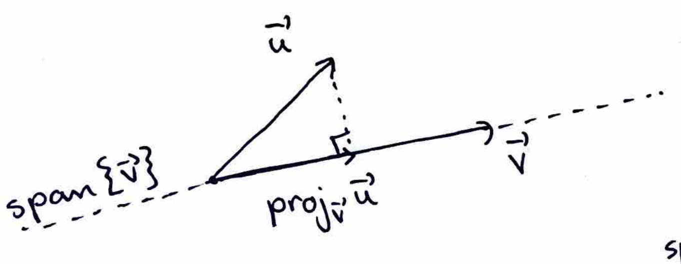
Vi ønsker å finne den verdien av a som minimerer $f(a)$ (husk: $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$ er konstanter)

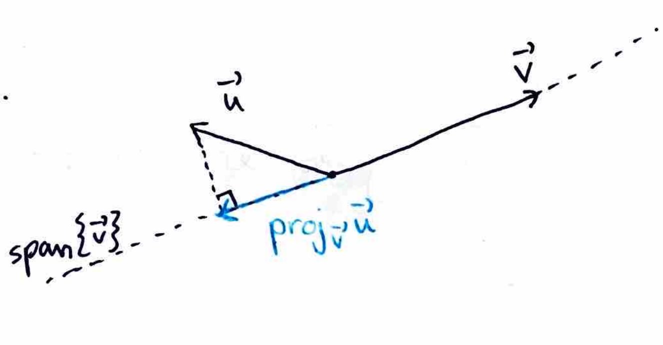
↳ fra videregående: deriver og sett lik 0

$$f'(a) = 2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle a - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$$

Dermed er $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\vec{v}$ vektoren i $\text{span}\{\vec{v}\}$ som ligger nærmest $\vec{u}$.





4) V indreproduktrom, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$

Skal vise:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ortogonale $\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lineært uavhengige

Definisjoner vi trenger:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ortogonale: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lineært uavhengige: $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Vi ønsker å vise at gitt en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som er $\vec{0}$, da må koeffisientene være 0.

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

tar indreprodukt med $\vec{v}_1$ på begge sider

$$\langle \vec{v}_1, c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{0} \rangle$$

linearitet av indreprodukt, indreprodukt med $\vec{0}$

$$c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + c_2 \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}_{=0} = 0$$

$=0$, siden $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er ortogonale

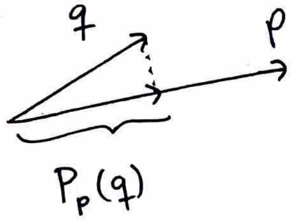
$\Rightarrow c_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = 0$, men $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \neq 0$, siden $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

$\Rightarrow c_1 = 0$

Lignende med c_2 (ta indreprodukt med $\vec{v}_2$ på begge sider)

$\Rightarrow \vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er lineært uavhengige.

5)



$$P_p(q) = \frac{\langle p, q\rangle}{\langle p, p\rangle}\, p$$ ← projeksjonen av q på p

$$\langle p, q\rangle = p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1) + p(2)\,q(2)$$

$$= 1\cdot(-1) + 0 + (-1)\cdot 3 = -4$$

$$\langle p, p\rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2$$

$$= 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow P_p(q) = \frac{\langle p, q\rangle}{\langle p, p\rangle}\, p = \frac{-4}{2}(1-x) = \underline{\underline{2x-2}}$$

(Rakk ikke denne i forelesning)