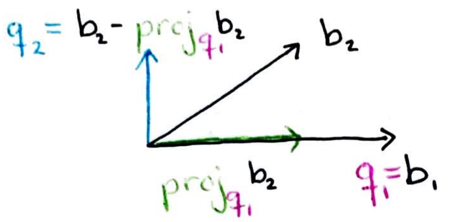
Plenumsregning uke 9

1) Skal finne ortogonal basis for $U = \text{span}\{1-x, -1+x^2\}$.

La $b_1(x) = 1-x$, $b_2(x) = -1+x^2$.

Metode for å finne ortogonal (evt ortonormal) basis: Gram-Schmidt



$\{q_1, q_2\}$ blir den ortogonale basisen.

La $q_1(x) = b_1(x) = 1-x$.

Vi finner q_2 ved å ta b_2 minus projeksjonen av b_2 ned på q_1.

$$q_2(x) = b_2(x) - \text{proj}_{q_1} b_2$$

$$= b_2(x) - \frac{\langle q_1, b_2\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1(x)$$

$$= -1 + x^2 - \frac{q_1(0)\,b_2(0) + q_1(1)\,b_2(1) + q_1(2)\,b_2(2)}{q_1(0)^2 + q_1(1)^2 + q_1(2)^2}(1-x)$$

$$= -1 + x^2 - \frac{1\cdot(-1) + 0 + (-1)\cdot 3}{1^2 + 0^2 + (-1)^2}(1-x)$$

$$= -1 + x^2 + 2(1-x) = x^2 - 2x + 1$$

Så $q_1(x) = 1-x$ og $q_2(x) = x^2 - 2x + 1$ er en ortogonal basis for U.

2) $W \subseteq \mathbb{R}^n$, $W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ for alle } \vec{u} \in W\}$

↳ det ortogonale komplementet til W

Anta $\vec{w} \in W$ og $\vec{w} \in W^\perp$, altså $\vec{w} \in W \cap W^\perp$.

Siden $\vec{w} \in W^\perp$, har vi at $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0$ for alle $\vec{u} \in W$.

Vi har at $\vec{w} \in W$, så $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$. Dermed må $\vec{w} = \vec{0}$.

3) a) Egenvektorer $\vec{v}$ med egenverdi λ til matrisen A oppfyller $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$. Vi er gitt A og $\vec{v}$, skal finne λ.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

b) Løse $\vec{y}' = A\vec{y}$ hvor $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$.

Differensiallikning: Likning hvor den ukjente er en funksjon.

$$\boxed{\text{Husk: } y' = ay \Rightarrow y(t) = Ce^{at}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Hvis A er diagonal hadde $\vec{y}' = A\vec{y}$ vært masse sånne

↳ Vi skal bruke diagonalisering til å utnytte dette for å løse $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Når A er diagonaliserbar, har vi $A = PDP^{-1}$ hvor kolonnene i P er egenvektorene til A, og D er en diagonalmatrise med egenverdiene til A langs diagonalen.

(Vi antar nå at A er en nxn-matrise)

Da kan vi skrive om til $\vec{y}' = PDP^{-1}\vec{y}$. Ved å gange med P^{-1} fra venstre på begge sider får vi

$$P^{-1}\vec{y}' = DP^{-1}\vec{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}' = D\vec{z} \quad \text{hvor } \vec{z} = P^{-1}\vec{y}$$

Komponentene i er $z_k' = \lambda_k z_k$. Vi så i sta at løsningen da er $z_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}$, hvor c_k er en konstant. Dermed er $\vec{z}$ gitt ved

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_n t}$$

Men vi skal jo løse $\vec{y}' = A\vec{y}$, så vi bruker at $\vec{z} = P^{-1}\vec{y}$, altså $\vec{y} = P\vec{z}$. Siden kolonnene i P er egenvektorer $\vec{v}_k$ til A, får vi

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

Så tilbake til oppgaven, hehe, vi har altså løsningen

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

hvor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Dermed får vi $\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{3}{2}t}$.

Vi finner c_1 og c_2 ved å bruke initialverdien.

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = -3,\ c_2 = 2.$$

Så: $\vec{y}(t) = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{3}{2}t}$.

(altså: $y_1(t) = -3e^t + 4e^{\frac{3}{2}t}$, $y_2(t) = -3e^t + 2e^{\frac{3}{2}t}$)

4) A er diagonaliserbar, så $A = PDP^{-1}$.

$$\underline{A^4 = A} \Rightarrow (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}DP^{-1}) = PDP^{-1}$$

Så $PD^4P^{-1} = PDP^{-1}$. Ganger med P fra høyre, og med P^{-1} fra venstre gir $\underline{D^4 = D}$.

D er en diagonalmatrise, så elementene λ på diagonalen oppfyller $\underline{\lambda^4 = \lambda} \Leftrightarrow \lambda(\lambda^3 - 1) = 0$, så $\underbrace{\lambda = 0 \text{ eller } \lambda = 1}_{\text{siden reelt diagonaliserbar } (\lambda \in \mathbb{R})}$. Men da oppfyller λ også $\underline{\lambda^2 = \lambda}$.

Dermed oppfyller D at $\underline{D^2 = D}$.

Ved å gange med P^{-1} fra høyre, P fra venstre og $I = P^{-1}P$ "i midten" får vi

$$PD^2P^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow PDP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow \underline{A^2 = A}.$$