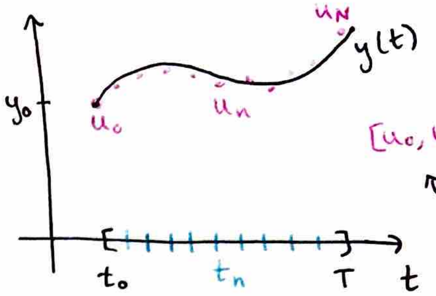
Plenumsregning uke 11

Først litt om hva vi driver med: Skal løse initialverdiproblemet (IVP) $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ numerisk. Altså: istedenfor å finne funksjonen y, finner vi tilnærmede verdier av y i noen tidspunkter t_n.



Eksempel: Skal løse $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ numerisk.

Husk: $y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ (definisjon av deriverte)

Når numerisk: istedenfor $\lim_{h \to 0}$, lar vi h være veldig liten, det gir

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx f(t, y(t))$$

Tilnærmet, siden venstresiden ikke lenger er nøyaktig den deriverte

$$\Rightarrow y(t+h) \approx y(t) + h f(t, y(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)}$$ Euler's metode

Alle oppgavene i dag har med Runge-Kutta-metoder å gjøre: Dette er metoder for å løse $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ på formen:

$$\boxed{\begin{aligned} K_i &= f\left(t_n + c_i h,\ u_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j\right) \quad i = 1, \dots, s \\ u_{n+1} &= u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i K_i \end{aligned}}$$

Kan representeres med Butchertablået:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

1) Ser at $f(t,y) = t \cdot y^2$ og at startverdiene

a) er $t=0$, $y=0.5$, så initialverdiproblemet

er $\underline{\underline{y' = ty^2, \quad y(0) = 0.5.}}$

b) Vi leser av og ser at metoden er gitt ved

$$K_1 = f(t_n \overset{+0h}{}, u_n) \quad {\scriptstyle +0K_1 + 0K_2}$$

$$K_2 = f(t_n + h, y_n + hK_1 \underset{+0 \cdot K_2}{}) \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

Metoden er eksplisitt siden a_{11}, a_{12} og a_{22} er 0 i Butchertabläet. Det betyr at K_i ikke "avhenger" av noen K_j for $j \geq i$. (Tenk: Vi har all informasjonen vi trenger når vi regner ut K_i)

c) Kjører koden med $N=1$: Da kalles step én gang inni for-løkken med verdiene $t=0$, $y=0.5$, $h=0.1$

step(0, 0.5, 0.1) : $K_1 = f(0, 0.5) = 0 \cdot 0.5^2 = 0$

$K_2 = f(0+0.1, 0.5 + 0.1 \cdot 0) = 0.1 \cdot 0.5^2 = 0.025$

y_new $= 0.5 + \frac{0.1}{2}(0 + 0.025) = 0.50125$

t_new $= 0 + 0.1 = 0.1$

Det skrives ut: 0.1, 0.50125

2) $y' = y^2 + t, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$

a) Skal utføre ett steg, altså regne ut u_1.

Setter $u_0 = y(0) = 1, \quad t_0 = 0, \quad f(t,y) = y^2 + t$

$$K_1 = f(t_0, u_0) = f(0, 1) = 1^2 + 0 = 1$$

$$K_2 = f(t_0 + h, u_0 + hK_1) = f(0 + 0.1, 1 + 0.1 \cdot 1) = 1.1^2 + 0.1 = 1.31$$

$$K_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{h}{4}K_1 + \frac{h}{4}K_2\right) = f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.1}{4} \cdot 1 + \frac{0.1}{4} \cdot 1.31\right)$$

$$= f(0.05, 1.05775) = (1.05775)^2 + 0.05 = 1.1688350625$$

$$\Rightarrow u_1 = u_0 + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + 4K_3)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{6}(1 + 1.31 + 4 \cdot 1.1688350625) = \underline{\underline{1.116422 3375}}$$

b) Butchertablå:

0			
1	1		
1/2	1/4	1/4	
	1/6	1/6	2/3

3) Merk at dette var en flervalgsoppgave i uke 10

Notasjon:

- $y_n = y(t_n)$: eksakt løsning ved t_n
- u_n : numerisk løsning ved t_n
- u_n^* : numerisk løsning ved t_n, hvor vi startet ved y_{n-1} (altså eksakt løsning ved t_{n-1})

Lokal avbruddsfeil: $\tau_n(h) = \frac{1}{h}(y_n - u_n^*)$

Global avbruddsfeil: $\tau(h) = \max_{n=0,\dots,N_h} |\tau_n(h)|$

Orden: $\tau(h)$ er av orden p hvis $\tau(h) \leq Ch^p$, hvor $C > 0$ er en konstant. Vi skriver $\tau(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

Taylor-utvikling: $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2!}y''(t) + \frac{h^3}{3!}y'''(t) + \dots$

↳ dette er en uendelig sum. Ved å erstatte de siste leddene med et feil-ledd, får vi den endelige summen

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(t) + \underbrace{\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)}_{\text{feil-ledd}}$$

hvor $\xi \in (t, t+h)$.

Vi sier at vi "taylor-utvikler y rundt t"

Merk at vi kan skrive metoden som

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_n + h, u_n + hf(t_n, u_n))\right) \\ &= u_n + \frac{h}{2}\left(f(u_n) + f(u_n + hf(u_n))\right), \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $f(t,y) = f(y)$, altså at f kun avhenger av y.

Vi regner ut $\tau_{n+1}(h)$:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &= \frac{1}{h}(y_{n+1} - u_{n+1}^*) \\ &= \frac{1}{h}\left(y(t_n + h) - \left(y(t_n) + \frac{h}{2}\left(f(y(t_n)) + f(y(t_n) + hf(y(t_n)))\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\cancel{y(t_n)} + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_n) + \mathcal{O}(h^4) \\ &\qquad - \cancel{y(t_n)} - \frac{h}{2}f(y(t_n)) - \frac{h}{2}f(y(t_n) + hf(y(t_n)))\Big) \end{aligned}$$

Så bruker vi at $y'(t_n) = f(y(t_n))$, og i det siste leddet Taylorutvikler vi f rundt $y(t_n)$.

$$\tau_{n+1}(h) = \cancel{f(y(t_n))} + \cancel{\frac{h}{2} y''(t_n)} + \frac{h^2}{6} y'''(t_n) + O(h^3)$$

$$- \cancel{\frac{1}{2} f(y(t_n))} - \frac{1}{2}\left(\cancel{f(y(t_n))} + \cancel{hf(y(t_n))f'(y(t_n))} + \frac{(hf(y(t_n)))^2}{2} f''(y(t_n)) + O(h^3)\right)$$

Videre bruker vi at $y''(t_n) = y'(t_n) f'(y(t_n)) = f(y(t_n)) f'(y(t_n))$ (Dette følger av kjerneregelen. Merk at y er derivert med hensyn på t, mens f mhp y)

Så bruker vi at

$$y'''(t_n) = \frac{d}{dt} y''(t_n) = \frac{d}{dt}\Big(f(y(t_n)) f'(y(t_n))\Big)$$

$$= f'(y(t_n)) \cdot y'(t_n) \cdot f'(y(t_n)) + f(y(t_n)) \cdot f''(y(t_n)) y'(t_n)$$

$$= (f'(y_n))^2 f(y_n) + (f(y_n))^2 f''(y_n),$$

det gir

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h^2}{6}(f'(y_n))^2 f(y_n) + \frac{h^2}{6}(f(y_n))^2 f''(y_n) - \frac{h^2}{4}(f(y_n))^2 f''(y_n) + O(h^3)$$

$$= h^2\left(\frac{1}{6}(f'(y_n))^2 f(y_n) - \frac{1}{12}(f(y_n))^2 f''(y_n)\right) + O(h^3)$$

Vi ser at h^2-leddet ikke kanselleres, den globale avbruddsfeilen er dermed av orden 2.

Taylor-utvikling: i matte 1: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Her: funksjonen heter ofte y (istedenfor f). La $x = t+h$ og $a = t$. Det gir $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \frac{h^3}{3!} y'''(t) + \dots$