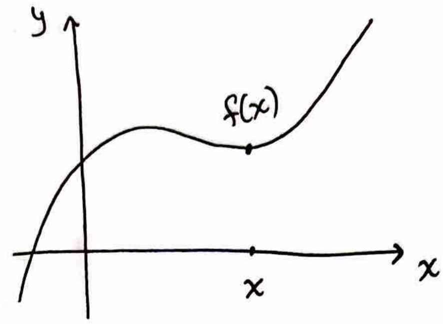
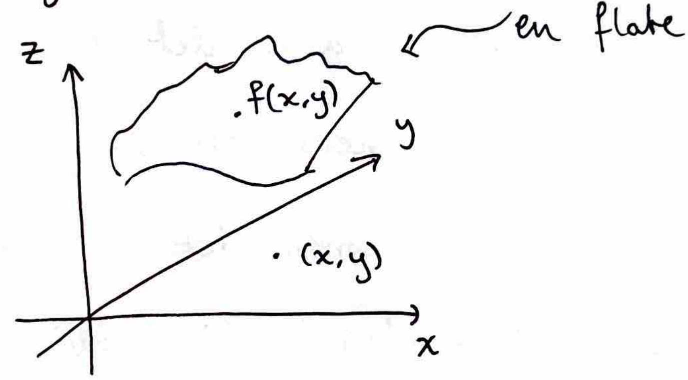
Plenumsregning uke 13

Vi skal se på funksjoner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Eksempel: Vi er vant til at $n = m = 1$, altså at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

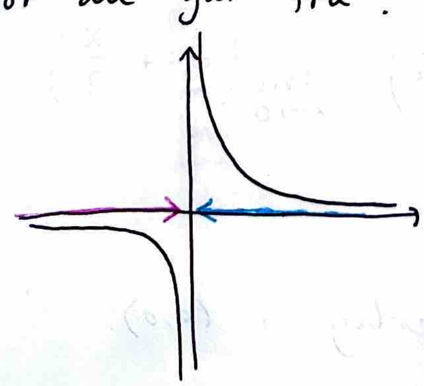


$n = 2, m = 1$ er også greit å visualisere, da har vi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



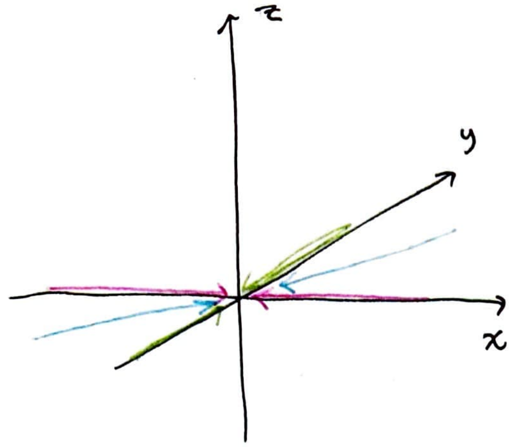
$n = 3, m = 1$ er vanskelig å tegne, men man kan tenke på $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som en funksjon som tar inn et koordinat i rommet og gir ut hva temperaturen er i dette koordinatet.

Grenseverdier: husk at grenseverdier kan avhenge av "hvor du går fra". For eksempel $f(x) = \frac{1}{x}$, ser slik ut:



Hvis vi går mot 0 langs den negative aksen, er grenseverdien lik $-\infty$. Mens hvis vi går langs den positive aksen, er grenseverdien i 0 lik ∞.

Når vi ser på grenseverdier for funksjoner $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, har vi mange veier å gå mot et punkt på:



Hvis vi skal beregne $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$, kan vi for eksempel gå langs $y=0$ og $x=y$ og $x=0$ og <u>uendelig</u> mange andre retninger.

1) Vi ser at f hvertfall er kontinuerlig utenfor punktet (0,0), siden det er en rasjonal funksjon hvor nevneren er ulik 0.

La oss sjekke kontinuitet i punktet (0,0):

f er kontinuerlig i (0,0) hvis

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Vi har at $f(0,0) = 0$.

Sjekker grenseverdien langs $x=y$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x + x^3}{x^2 + x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x^2} + \frac{x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \neq 0$$

Dermed er f ikke kontinuerlig i (0,0).

2) Den retningsderiverte i retning $\vec{r}$ ut fra punktet $\vec{a}$ er definert ved lengde 1

$$D_{\vec{r}} f(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}.$$

Hvis f er deriverbar i punktet $\vec{a}$, kan vi regne ut den retningsderiverte ved

$$D_{\vec{r}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}.$$

$|\vec{r}| = 1$

Husk at $\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = |\nabla f(\vec{a})||\vec{r}| \cos\theta = |\nabla f(\vec{a})| \cos\theta$,

hvor θ er vinkelen mellom $\nabla f(\vec{a})$ og $\vec{r}$.

Så vi maksimerer $D_{\vec{r}} f(\vec{a})$ ved å maksimere $|\nabla f(\vec{a})| \cos\theta$ med hensyn på θ.

Punktet vi skal se på er $\vec{a} = (1, \ln 2, \frac{1}{2})$.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 2z)$$

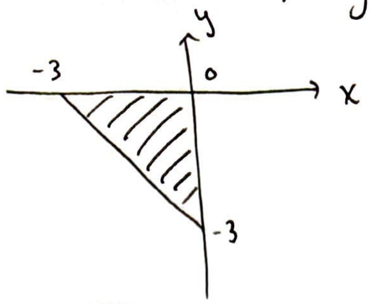
$$\Rightarrow \nabla f(1, \ln 2, \tfrac{1}{2}) = (e^{\ln 2}, 1 \cdot e^{\ln 2}, 2 \cdot \tfrac{1}{2}) = (2, 2, 1)$$

$|\nabla f(1, \ln 2, \frac{1}{2})| \cos\theta$ er størst når $\cos\theta = 1$, altså $\theta = 0$, som vil si at $\nabla f(1, \ln 2, \frac{1}{2})$ og $\vec{r}$ peker samme retning. Dermed får vi

$$\vec{r} = \frac{\nabla f(1, \ln 2, \frac{1}{2})}{|\nabla f(1, \ln 2, \frac{1}{2})|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}}.$$

3) Skal maksimere / minimere $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$

på området



Tips: Tegn i geogebra 3d, definér funksjonen, så skriv If(x ≤ 0 && y ≤ 0 && x + y ≥ -3, f(x,y))

↳ dette tegner funksjonen over området

Tre steg (s. 20-21 i bind 2):

1. Stasjonære punkter i det indre
2. Kandidater på randen
3. Sammenligne kandidater

1. Stasjonære punkter i det indre ($\nabla f = 0$)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x - y + 1, 2y - x + 1)$$

⇝ Løser $\nabla f(x,y) = (0,0)$ for x og y

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x + 1$$

$$2(2x+1) - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 2 - x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

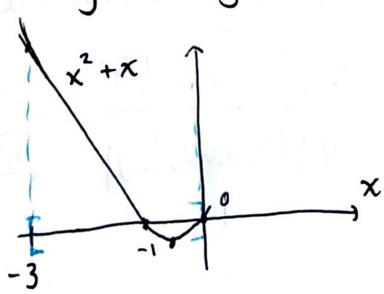
$$\Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -1$$

$\boxed{\text{Kandidat : } (-1,-1)}$

2. Kandidater på randen

Sjekke langs $y=0$, $x=0$ og $x+y=-3$.

→ $\underline{y=0}$: $f(x,0) = x^2 + x$



Deriverer og setter lik 0:

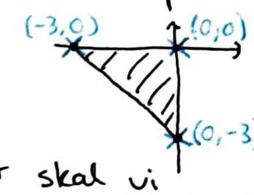
$$\frac{d}{dx}(x^2+x) = 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Kandidat: } (-\tfrac{1}{2}, 0)}$

Så ytterpunktene ("randen til randen")

$\boxed{\text{Kandidater: } (0,0) \text{ og } (-3,0)}$

totalt sett disse tre punktene



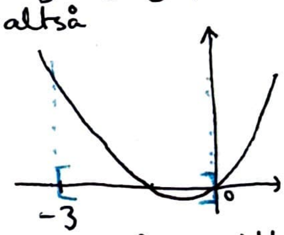
$\to$ $\underline{x=0}$: $f(0,y) = y^2 + y$

Deriverer og setter lik 0:

$$\frac{d}{dy}(y^2+y) = 2y+1 = 0 \implies y = -\frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Kandidat: } (0, -\tfrac{1}{2})}$

Her skal vi maksimere/minimere $f(y) = y^2+y$ på $[-3,0]$, altså



Da må vi sjekke ytterpunktene, altså randen til $[-3,0]$, som er $\{-3,0\}$

Så ytterpunktene ("randen til randen")

$\boxed{\text{Kandidater: } (0,0) \text{ og } (0,-3)}$

langs $x=0$, så vi får punktene $(0,-3)$ og $(0,0)$ i planet

$\to$ $\underline{x+y=-3}$: $f(x,-x-3) = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x - x - 3$

$$= x^2 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x - 3$$

$$= 3x^2 + 9x + 6$$

Deriverer og setter lik 0:

$$\frac{d}{dx}(3x^2+9x+6) = 6x+9 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Kandidat: } \left(-\tfrac{3}{2}, -(-\tfrac{3}{2})-3\right) = \left(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)}$

(Ytterpunktene har vi allerede lagt til som kandidater)

3. Sammenligne kandidater

Vi regner ut funksjonsverdien i alle kandidat-punktene:

(x,y)	$f(x,y)$
$(-1,-1)$	-1
$(-\frac{1}{2},0)$	$-\frac{1}{4}$
$(0,0)$	0
$(-3,0)$	6
$(0,-3)$	6
$(0,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{4}$
$(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{4}$

Den minste verdien til f på området er dermed $\underline{-1}$, mens den største verdien til f på området er $\underline{6}$.

Lykke til på eksamen! :)