Plenumsregning 3

TMA4411 Matematikk 2B – Uke 7

Oppgave 1

La $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Finn matriserepresentasjonen til T, der vi velger basisen $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Oppgave 2

Vi får oppgitt basisen $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ for vektorrommet V og en lineærtransformasjon $T : V \to V$, gitt ved $T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u} - 4\mathbf{w}$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $T(\mathbf{w}) = -2\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

a) Hva er matriserepresentasjonen til T med hensyn på basisen B?

Hint: Uttykk $\mathbf{u}$ *som* $[1\ 0\ 0]^T$ *og tilsvarende med* $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$.

b) Finn $T(\mathbf{u} - 3\mathbf{w} + 2\mathbf{v})$ uttrykt i koordinater med hensyn på basisen B.

c) Hva er kjernen og rekkevidden til T? Avgjør om T er surjektiv og/eller injektiv.

Oppgave 3

La $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vis at $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ er vektoren i $\text{span}\{\mathbf{v}\}$ som ligger nærmest $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Oppgave 4

La V være et indreproduktrom og la $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to vektorer i V slik at $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Vis at dersom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, så er de også lineært uavhengige.

Oppgave 5

Finn projeksjonen av $q(x) = -1 + x^2$ ned på $p(x) = 1 - x$ i $\mathbb{P}_2$ med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$