

## Flervalgsoppgavene

**Oppgave 1** (i) Skal utsagnet være sant må det inhomogene lineære likningssystemet under ha en løsning.

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 6 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & -8 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - r_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 6 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{r_1 + r_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 5 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hvis det finnes en løsning  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , så ser vi  $x_4 = -1$ . Systemet reduseres til følgende lineære likningssett:

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 5 \\ -9 & -13 & 15 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2 \leftrightarrow r_1} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -9 & 5 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - 6r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + 4r_1} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

Vi ser at det siste inhomogene lineære systemet har for eksempel løsningen  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ , som gir at det opprinnelige systemet har løsningen  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1)$ .

Dette medfører at  $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$ .

(ii) Skal utsagnet være sant må likningssystemet under ha en løsning.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 0 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_1+r_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{r_2-r_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

(3)

Systemet reduseres til

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2-2r_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2 \leftrightarrow r_1} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2-6r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+4r_1} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_3+r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Den siste raden viser at systemet ikke er løsbart, slik at  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \text{Span}(S)$ .

(iii) Utrekningene i (i) (og (ii)) viser at rangen til matrisen  $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -9 \\ -9 & -13 & 15 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$  er 2, slik de tre første vektorene i  $S$  er allerede lineært avhengige og dermed er  $S$  selv lineært avhengig og (iii) er ikke sann.

**Oppgave 2** Fra oppgave 18 (g) og (h) i bind 1 side 134, så er (i), (ii) og (iii) alltid like. Rangteoremet sier at (iii) og (iv) er like, dvs. alle tallene er like.

### Langsvarsoppgavene

**Oppgave 1** La  $S = \{1, \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x)\}$ . Siden  $S$  er en ortonormal mengde av vektorer, så er projeksjonen av  $\sin(x)$  i  $V$  ned på underrommet  $U$  gitt ved

$$\begin{aligned} \langle 1, \sin(x) \rangle 1 + \langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle \sqrt{3}x + \langle \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1) + \\ \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

Gitt at  $\langle 1, \sin(x) \rangle = 0$  og  $\langle x^k, \sin(x) \rangle = 0$  for  $k$  like, så følger at vi må beregne

$$\langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle \sqrt{3}x + \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x).$$

Fra de oppgitte formelene får vi at

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle &= \sqrt{3}(\sin(1) - \cos(1)) \\ \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle &= \frac{5\sqrt{7}}{2}(5 \cos(1) - 3 \sin(1)) - \frac{3\sqrt{7}}{2}(\sin(1) - \cos(1)) \\ &= 14\sqrt{7} \cos(1) - 9\sqrt{7} \sin(1) \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\text{proj}_U(\sin(x)) = 3(\sin(1) - \cos(1))x + \frac{7}{2}(14 \cos(1) - 9 \sin(1))(5x^3 - 3x).$$

### Oppgave 2

Her må vi finne egenverdier og de tilhørende egenvektorene til matrisen  $A$ :

Egenverdier:

$$\begin{aligned} \det \left( \lambda I_3 - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) &= \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Dette gir egenverdiene:  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$  og  $\lambda_3 = 2$ .

Egenvektorer: Ser direkte at  $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor med egenverdi 2.

For  $\lambda_1 = 3$ , må vi løse følgende likningssystemer:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

som har løsningen  $(x, y, z) = (y, y, 4y) = y(1, 1, 4)$ , og for  $\lambda_2 = 1$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

hvor en umiddelbart ser at  $(x, y, z) = (0, y, -3y) = y(0, 1, -3)$  er en løsning. Dette gir egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

med egenverdiene  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$  og  $\lambda_3 = 2$ , henholdsvis, som vi vet er lineært uavhengig siden alle egenverdiene er forskjellige. Dette gir at matrisen  $A$  er diagonaliserbar, og matrisen som

diagonaliserer  $A$  er gitt ved  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ , dvs.  $3 \times 3$ -matrisen med de tre egenvektorene

som kolonner. Da er

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La  $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1}x(t)$ , dvs.  $x(t) = Py(t)$ . Innsatt i den opprinnelige likningen:

$$x'(t) = Py'(t) = APy(t) \Rightarrow y'(t) = P^{-1}APy(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dette gir løsningen  $y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$ , som gir at

$$x(t) = Py(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ 4c_1 e^{3t} - 3c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsen gir at

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ 4c_1 - 3c_2 + c_3 \end{bmatrix},$$

hvor vi ser at  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$  og  $c_3 = 3$ . Dette gir at løsningen

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} + e^t \\ 4e^{3t} - 3e^t + 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

### Oppgave 3 La

$$S_3 = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

være standardbasisen in  $\mathbb{R}^3$ , og la

$$S_2 = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

være standardbasisen in  $\mathbb{R}^2$ . Vi ønsker å finne  $[T]_{S_2 \leftarrow S_3}$ . Vi har gitt at  $T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Videre er

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette gir at

$$[T]_{S_2 \leftarrow S_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Oppgave 4 Gitt initialverdiproblemet

$$\dot{y} = f(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

der  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er glatt. Metoden er gitt ved

$$u_{n+1} = u_n + h\left(\theta f(u_n) + (1 - \theta)f(u_{n+1})\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Den lokale avbruddsfeilen defineres som

$$h \cdot \tau_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h(\theta f(y(t_n)) + (1 - \theta)f(y(t_{n+1}))). \quad (4)$$

Med andre ord setter vi inn den eksakte løsningen  $y(t)$  i metoden.

Vi bruker Taylorutvikling av  $y(t)$  rundt  $t_n$ :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3).$$

Siden  $y'(t) = f(y(t))$ , får vi

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3).$$

Videre utvikler vi

$$f(y(t_{n+1})) = f(y(t_n)) + hy''(t_n) + O(h^2),$$

der vi har brukt at

$$y''(t) = f'(y(t))f(y(t)).$$

Setter vi alt dette inn i (4), får vi

$$\begin{aligned} h \cdot \tau_{n+1} &= y(t_n) + hf(y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) \\ &\quad - y(t_n) - h(\theta f(y(t_n)) + (1 - \theta)(f(y(t_n)) + hy''(t_n) + O(h^2))), \end{aligned}$$

Til slutt får vi

$$h \cdot \tau_{n+1} = h^2 \left( \frac{1}{2} - (1 - \theta) \right) y''(t_n) + O(h^3) = h^2 \left( \theta - \frac{1}{2} \right) y''(t_n) + O(h^3).$$

**a)** Den ledende feilen er av orden  $O(h^2)$ , altså

$$\tau_{n+1} = O(h).$$

Dermed har metoden minst orden 1 for alle  $\theta \in (0, 1)$ .

**b)** For å få orden 2 må  $h^2$ -leddet forsvinne, altså

$$\theta - \frac{1}{2} = 0.$$

Dermed må

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

For denne verdien får vi  $\tau_{n+1} = O(h^2)$ , og metoden har derfor orden 2. Metoden blir da

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left( f(y_n) + f(y_{n+1}) \right),$$

som er trapesmetoden.

### Oppgave 5

La  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) = -6x \frac{2 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) = 2y \frac{x^2 + y^2 - 2}{1 + x^2 + y^2}$$

og dermed

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \right) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \left( -3x(2 + x^2 + y^2), y(x^2 + y^2 - 2) \right).$$

Lineariseringen  $L(\mathbf{x})$  til  $f(\mathbf{x})$  i punktet  $\mathbf{0}$  er gitt ved

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} = 5,$$

siden  $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

b)

De stasjonære punktene til  $f$  er løsningene til  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Vi finner at  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) = 0$  hvis og bare hvis  $x = 0$ . I dette tilfellet er  $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) = 0$  hvis og bare hvis  $y = 0$  eller  $y = \pm\sqrt{2}$ . Det eneste stasjonære punktet som ligger i  $D$  er  $\mathbf{0}$  og  $f(\mathbf{0}) = 5$ .

Det gjenstår å betrakt funksjonen på randen  $\partial D$  av  $D$ . Siden  $y^2 = 1 - x^2$  for alle punkter  $\mathbf{x} \in \partial D$ , kan vi finne alle kandidater for globale ekstremalpunkter som ligger på  $\partial D$  ved å se på funksjonen

$$g(x) = f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = 6 - 4x^2 - 3 \ln 2, \quad x \in [-1, 1].$$

Ved hjelp av envariabel kalkulus får vi at største verdi for  $g(x)$  er  $g(0) = f(0, \pm 1) = 6 - 3 \ln 2 \approx 3.92$  og minste er  $g(\pm 1) = f(\pm 1, 0) = 2 - 3 \ln 2 \approx -0.08$ .

Maksimumsverdien for  $f$  på det gitte området  $D$  er derfor  $f(0,0) = 5$ , mens minimumsverdien er  $f(\pm 1, 0) = 2 - 3 \ln 2$ .

### Oppgave 6

a) Middelverdisetningen: Det finnes et punkt  $\mathbf{c} = (c, d)$  på linjestykket mellom  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  slik at

$$f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Siden

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -2(x + 3y)e^{-(x+3y)^2} (1, 3),$$

får vi

$$f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = -2(c + 3d)e^{-(c+3d)^2} (1, 3) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

b)

Cauchy-Schwarz ligningen gir

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| &= 2|c + 3d|e^{-(c+3d)^2} |(1, 3) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})| \\ &\leq 2|c + 3d|e^{-|c+3d|^2} \sqrt{10} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|. \end{aligned}$$

Siden funksjonen  $|c + 3d|e^{-|c+3d|^2}$  er på formen  $|z|e^{-z^2}$  er det nok å finne en øvre skranke for funksjonen  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(z) = ze^{-z^2}$ . For å finne ekstremalpunktene til  $g$ , ser vi på  $g'(z) = (1 - 2z^2)e^{-z^2}$  som bytter fortegn fra positiv til negativ i punktet  $z = 1/\sqrt{2}$ . Maximumsverdien for  $g$  på det gitte interval  $[0, \infty)$  er derfor  $g(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$  og

$$|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| \leq \sqrt{20}e^{-\frac{1}{2}} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$