

## 1.1 Flervalg 1

La  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 15 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ . Avgjør hvilken av de følgende påstandene er sanne:

Velg ett alternativ:

$\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$

$S$  er en lineært uavhengig mengde i  $\mathbb{R}^4$

---

Maks poeng: 5

## 1.2 Flervalg 2

For enhver reell  $m \times n$ -matrise  $A$ , hvilke av de følgende tallene er alltid like?

*i)* dimensjonen til radrommet til  $A$  og dimensjonen til kolonnerommet til  $A$

Velg ett alternativ

ja

nei

*ii)* dimensjonen til radrommet til  $A$  og antall pivoter i den reduserte trappeformen til  $A$

Velg ett alternativ:

ja

nei

*iii)* dimensjonen til radrommet til  $A$  og  $n$  minus dimensjonen til nullrommet til  $A$

Velg ett alternativ

ja

nei

*iv)*  $n$  minus dimensjonen til nullrommet til  $A$  og antall pivoter i den reduserte trappeformen til  $A$

Velg ett alternativ

ja

nei

---

Maks poeng: 5

**Oppgave 1** La  $V$  være indreproduktrommet av alle reelle kontinuerlige funksjoner definert på  $[-1, 1]$ , dvs.

$$V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kontinuerlig}\},$$

med skalarmultiplikasjon og addisjon gitt ved

$$\begin{aligned}(a \cdot f)(x) &= af(x) \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x)\end{aligned}$$

for alle  $a \in \mathbb{R}$  og alle  $f, g \in V$ , og indreprodukt gitt ved

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

for alle  $f, g \in V$ .

Gitt den ortonomale mengden  $S = \{1, \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x)\} \subset V$ , la  $U = \text{Span}(S)$ . Beregn projeksjonen  $\text{proj}_U(\sin(x))$ .

En kan bruke uten bevis at

$$\int_{-1}^1 x^k \sin(x)dx = \begin{cases} 0, & k \text{ er like,} \\ 2 \sin(1) - 2 \cos(1) \approx 0.60234, & k = 1, \\ 10 \cos(1) - 6 \sin(1) \approx 0.35420, & k = 3. \end{cases}$$

**Oppgave 2** La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løs initialverdi problemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 3** La  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  være en lineærtransformasjon slik at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem matriserepresentasjonen til  $T(\mathbf{x})$ .

**Oppgave 4** Gitt initialverdiproblemet

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

og anta at  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er glatt.

La  $y_n = y(t_n)$  og betrakt den følgende metoden

$$u_{n+1} = u_n + h(\theta f(u_n) + (1 - \theta)f(u_{n+1})) = g(u_n, u_{n+1}), \quad \theta \in (0, 1).$$

- a) Analyser den lokale avbruddsfeilen  $\tau_n(h) = \frac{1}{h}(y_n - u_n^*)$ , der  $u_n^* = g(y_{n-1}, y_n)$  for å vise at metoden har minst orden 1 for alle  $\theta \in (0, 1)$ .
- b) Vis at metoden har orden 2 for én bestemt verdi av  $\theta$ . Hvilken?

**Oppgave 5**

La  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  og betrakt funksjonen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gitt ved

$$f(x, y) = 5 - 3x^2 + y^2 - 3 \ln(1 + x^2 + y^2).$$

- a) Beregn  $\nabla f(\mathbf{x})$ , dvs. gradienten til  $f$ , og finn lineariseringen  $L(\mathbf{x})$  til  $f(\mathbf{x})$  i punktet  $\mathbf{0}$ .
- b) Finn de stasjonære punktene for  $f$  og bestem de globale ekstremalpunktene for  $f$ .

**Oppgave 6**

La  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  være funksjonen gitt ved  $f(x, y) = e^{-(x+3y)^2}$ .

- a) Formuler middelverdisetningen for den gitte funksjonen  $f$  for to vilkårlige punkter  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ .
- b) Bruk middelverdisetningen til å vise at

$$|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| \leq 2\sqrt{10} |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \quad \text{for alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$