

Flervalgsoppgaver**Oppgave 1**

La V være et reelt vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer i V hvor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2,$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 3.$$

Hvilke av de følgende påstandene er sanne?

- (i) $\mathbf{u}$ og $-2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ står ortogonalt på hverandre.

☐ sann

☐ usann

- (ii) $3\mathbf{u} - \mathbf{w}$ og $\mathbf{v}$ står ortogonalt på hverandre.

☐ sann

☐ usann

Oppgave 2

Hvis en reell matrise A med n rader er diagonaliserbar, hvilke av de følgende påstandene er alltid sanne?

- (i) A er en $n \times n$ -matrise (kvadratisk matrise).

☐ sann

☐ usann

- (ii) A har n forskjellige egenverdier.

☐ sann

☐ usann

- (iii) A har n lineært uavhengige egenvektorer.

☐ sann

☐ usann

- (iv) A er en symmetrisk matrise.

☐ sann

☐ usann

Langsvarsoppgaver**Oppgave 1** La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet), radrommet og nullrommet (kjernen) til A . Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene.

Oppgave 2 La $\mathbb{P}_2$ være vektorrommet av alle polynomer i én variabel x av grad høyst 2 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ og $C = \{1, 1-x, 1-x+x^2\}$ være to basiser for $\mathbb{P}_2$. Finn $[\text{id}]_{C \leftarrow B}$, overgangsmatrisen fra basisen B til basisen C .

Oppgave 3 La $V = \mathbb{P}_2$ være vektorrommet av alle polynomer i én variabel x av grad høyst 2 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $T: V \rightarrow V$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T(p(x)) = 2p(x) - p'(x) \quad \text{for et polynom } p(x) \in V.$$

Avgjør om lineærtransformasjonen T er injektiv, om den er surjektiv, og om den er en isomorfi.

Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 Gitt et initialverdiproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

sammen med følgende kode:

```
def method(odefile, iv, h, N):  
    sol=np.zeros((iv.size,N+1))  
    sol[:,0]= iv  
    t0=0.0  
    tt=np.zeros(N+1)  
    for n in range(N):  
        tn=t0+n*h  
        sol_o=sol[:,n]  
        k1=odefile(tn,sol_o)  
        k2=odefile(tn+h/2,sol_o+h/2*k1)  
        k3=odefile(tn+h,sol_o-h*k1+2*h*k2)  
        sol_n=sol_o+h/6*(k1+4*k2+k3)  
        sol[:,n+1]=sol_n  
        tt[n+1]=tn+h  
    return sol,tt
```

Skriv ned Runge–Kutta metoden som er implementert i denne koden, og finn det tilhørende Butcher tablået

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}.$$

Oppgave 6 Vis at

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left(\frac{y^3}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Oppgave 7

La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen $f(x, y) = x^2 - 4y^2$.

- Beregn ∇f , gradienten til f . Finn retningen $\mathbf{r}$ der funksjonsverdien til f øker raskest ut fra punktet $(2, 1)$.
- Finn alle stasjonære punkter for f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller sadelpunkter.
- La $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2] \text{ og } y \in [-1, 1]\}$. Finn global maksimumsverdi og minimumsverdi for f på området D .