

Flervalgsoppgaver**Oppgave 1**

(i) Sann.

Vi har at

$$\langle \mathbf{u}, -2\mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, -2\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (-2)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (-2)1 + 2 = 0.$$

Dette medfører at $\mathbf{u}$ og $-2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ står ortogonalt på hverandre.

(ii) Sann.

Vi har at

$$\langle 3\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle 3\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle -\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (-1)\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 3 + (-1)3 = 0.$$

Dette medfører at $3\mathbf{u} - \mathbf{w}$ og $\mathbf{v}$ står ortogonalt på hverandre.**Oppgave 2**

(i) Sann.

En diagonaliserbar matrise er alltid en kvadratisk matrise, dvs. A er en $n \times n$ -matrise for en $n \geq 1$.

(ii) Usann.

Teorem 6 i seksjon 6.8 i bind 2 sier at hvis en $n \times n$ -matrise A har n forskjellige egenverdier, så er matrisen A diagonaliserbar. Men ikke alle diagonaliserbare $n \times n$ -matriser har forskjellige egenverdier. For eksempel, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ har $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ som egenverdier, men er helt klart diagonaliserbar siden den allerede er en diagonalmatrise.

(iii) Sann.

Teorem 1 og Teorem 3 i seksjon 6.8 i bind 2 sier til sammen at en $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer. Dette gir at (iii) alltid er sann.

(iv) Usann.

Teorem 3 i seksjon 7.4 i bind 2 sier at en reell symmetrisk $n \times n$ -matrise alltid har n lineært uavhengige egenvektorer, dvs. den er alltid diagonaliserbar. Men ikke alle diagonaliserbare matriser er symmetriske, for eksempel, matrisen A fra langsvarsoppgave 4 er diagonaliserbar, men ikke symmetrisk.

Langsvarsoppgaver

Oppgave 1 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Utfører elementære radoperasjoner på A for å finne den reduserte trappeformen av A :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(r_2 - r_3)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{9}(r_3 + 7r_2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - 3r_2 + 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ser at rangen til A er 3, slik at dimensjonen til radrommet og kolonnerommet (søylerommet) er begge 3. Nullrommet (kjernen) til A er gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og dermed er dimensjonen til nullrommet (kjernen) av A lik 1 og $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for nullrommet (kjernen).

Pivotene til A forteller oss at $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for kolonnerommet (søylerommet) til A . En basis for radrommet til A er $\{(3, 2, 1, 2), (2, 1, 3, 6), (1, 3, 2, 4)\}$ eller $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2)\}$.

Oppgave 2 La

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

og

$$C = \{c_1, c_2, c_3\} = \{1, 1-x, 1-x+x^2\}.$$

Vi har at

$$\begin{array}{lll} b_1 = 1 & & = c_1 \\ b_2 = 1+x & = 2 \cdot 1 + (-1)(1-x) & = 2c_1 + (-1)c_2 \\ b_3 = 1+x+x^2 & = 2 \cdot 1 + (-2)(1-x) + 1(1-x+x^2) & = 2c_1 + (-2)c_2 + c_3 \end{array}$$

Dette gir at

$$[\text{id}]_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3*Alternativ 1:*La $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Anta $T(p(x)) = T(q(x))$, da får vi

$$2a_0 - a_1 + 2(a_1 - a_2)x + 2a_2x^2 = T(p(x)) = T(q(x)) = 2b_0 - b_1 + 2(b_1 - b_2)x + 2b_2x^2 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Det er bare mulig hvis

$$\begin{aligned} 2a_0 - a_1 &= 2b_0 - b_1 \\ a_1 - a_2 &= b_1 - b_2, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

som gir at $a_i = b_i$ for $i \in \{0, 1, 2\}$, dvs. $p(x) = q(x)$. Dermed er T injektiv.Gitt $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, får vi $T(p(x)) = q(x)$ for en $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ hvis og bare hvis

$$2a_0 - a_1 + 2(a_1 - a_2)x + 2a_2x^2 = T(p(x)) = q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dette er bare mulig hvis

$$\begin{aligned} 2a_0 - a_1 &= b_0, \\ 2(a_1 - a_2) &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

som gir

$$a_0 = \frac{1}{4}(2b_0 + b_1 + 2b_2), \quad a_1 = \frac{1}{2}(b_1 + 2b_2), \quad \text{og} \quad a_2 = b_2.$$

Siden $q(x)$ kan være et hvilket som helst polynom i $\mathbb{P}_2$, er T surjektiv.

Siden T er både injektiv og surjektiv, er T en isomorfi.

Alternativ 2:

La $S = \{1, x, x^2\}$, som er en basis for V . Da er

$$\begin{aligned} T(1) &= 2 \cdot 1 - (1)' = 2 \\ T(x) &= 2x - (x)' = 2x - 1 \\ T(x^2) &= 2x^2 - (x^2)' = 2x^2 - 2x \end{aligned}$$

og

$$A = [\text{id}]_{S \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har at $\det(A) = 8 \neq 0$, slik at A er en inverterbar matrise. Dette impliserer at T er både en injektiv og surjektiv lineærtransformasjon, dvs. T er en isomorfi.

Oppgave 4 Her må vi finne egenverdier og de tilhørende egenvektorene til matrisen A først.

Egenverdier:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Dette gir egenverdiene: $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorer: For $\lambda_1 = -2$, må vi løse det følgende likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

som har løsningen $(x, y) = (x, -2x) = x(1, -2)$, og for $\lambda_2 = 5$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

hvor en umiddelbart ser at $(x, y) = (3y, y) = y(3, 1)$ er en løsning. Dette gir egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 5$, henholdsvis, som vi vet er lineært uavhengige siden alle egenverdiene er forskjellige.

Dette gir at den generelle løsningen til $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Initialbetingelsen gir at

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 + 3c_2 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix},$$

hvor vi ser at $c_1 = 3$ og $c_2 = 2$. Dette gir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = 3e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 Ifølge koden er den numeriske metoden gitt ved

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

der

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f(t_n + h, u_n - hk_1 + 2hk_2). \end{aligned}$$

Det tilhørende Butcher tablået ser slik ut

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Oppgave 6

Alternativ 1: For å vise utsagnet ser vi på grensen i polarkoordinater

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0+} \sin(r(\sin \theta)^3) = \sin\left(\lim_{r \rightarrow 0+} r(\sin \theta)^3\right) = 0.$$

Her brukte vi at $\sin(z)$ er kontinuertlig og grenselovene for skalarfunksjoner.

Alternativ 2: Vi begynner med å vise at

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0. \quad (1)$$

Siden

$$0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|$$

og $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, følger (1). Siden $\sin(z)$ er kontinuertlig får vi ved hjelp av grenselover for skalarfunksjoner

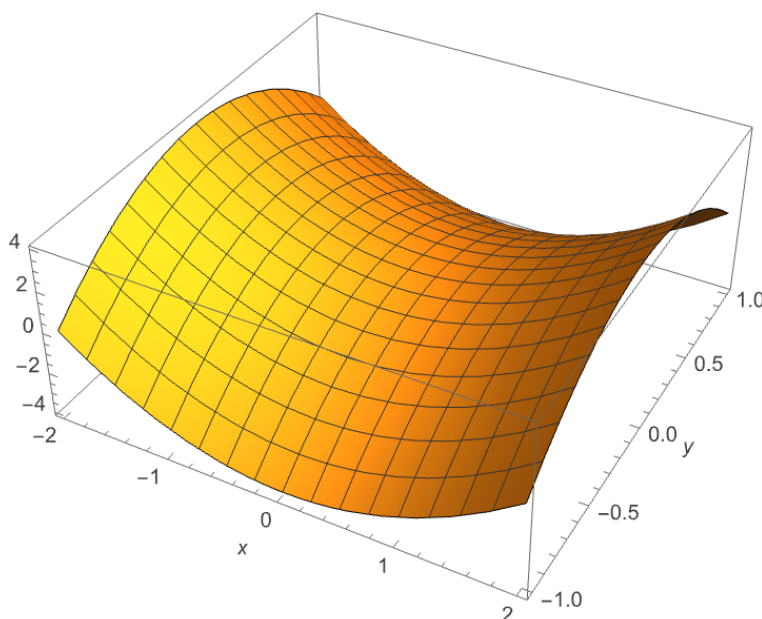
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right) = \sin\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}\right) = \sin(0) = 0.$$

Oppgave 7

- a) Gradienten er $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, -8y)$. Retningen $\mathbf{r}$ der f øker mest er gitt ved vektoren som peker i samme retning som ∇f ifølge side 41 i bind 2. Vi finner $\nabla f(2, 1) = (4, -8)$ og retningen r er derfor gitt ved enhver vektor som kan skrives som $\alpha(4, -8)$ med $\alpha > 0$.
- b) Vi har $\nabla f(x, y) = (2x, -8y) = (0, 0)$ hvis og bare hvis $x = y = 0$, dvs. origo er det eneste stasjonære punktet. Hesse-matrisen er

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix},$$

som gir at $H(0, 0)$ har en positiv og en negativ egenverdi, nemlig 2 og -8 , og dermed blir origo et sadelpunkt for f .

Figur 1: $f(x, y)$ på D

- c) Fra generell teori vet vi at globale maksimums- og minimumspunkter må være enten (indre) stasjonære punkter, eller punkter på randen av D . Det indre stasjonære punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt og kan dermed hverken være et globalt maksimums- eller minimumspunkt. Vi ser på funksjonen f på randen av D , dvs. på funksjonene $f(\pm 2, y) = 4(1 - y^2)$ for $y \in [-1, 1]$ og $f(x, \pm 1) = x^2 - 4$ for $x \in [-2, 2]$.

$f(\pm 2, y) = 4(1 - y^2)$ for $y \in [-1, 1]$: Funksjonen $g(y) = 4(1 - y^2)$ har ett stasjonært punkt, $y = 0$, som er et globalt maksimumspunkt, siden $g'(y) = -8y$ og $g''(y) = -8$. Dermed følger det at $f(\pm 2, y)$ antar, på intervallet $[-1, 1]$, den globale minimumsverdien 0 i $y = \pm 1$ og den globale maksimumsverdien 4 i $y = 0$.

$f(x, \pm 1) = x^2 - 4$ for $x \in [-2, 2]$: Funksjonen $h(x) = x^2 - 4$ har ett stasjonært punkt, $x = 0$, som er et globalt minimum, siden $h'(x) = 2x$ og $h''(x) = 2$. Dermed følger det at $f(x, \pm 1)$ antar, på intervallet $[-2, 2]$, den globale minimumsverdien -4 i $x = 0$ og den globale maksimumsverdien 0 i $x = \pm 2$.

Vi finner fra dette maksimumsverdien $f(\pm 2, 0) = 4$ og minimumsverdien $f(0, \pm 1) = -4$. Dvs. at f antar på D den globale maksimumsverdien 4 for punktene $(\pm 2, 0)$ og den globale minimumsverdien -4 for punktene $(0, \pm 1)$.