

# FORMELARK TMA4413

## Komplekse tall

Eulers formel:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Polarform: Hvis  $z = a + ib$ , så er  $z = re^{i\theta}$ , hvor

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ og } \theta = \begin{cases} \arctan b/a & \text{for } a > 0 \\ \pi + \arctan b/a & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Videre vil  $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta}$ .

## Vektorrom

Lineært spenn: La  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  være vektorer i et reelt vektorrom  $V$ . Det lineære spennet til disse er mengden av alle vektorer

$$\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{u}_i, \text{ for alle reelle } c_1, \dots, c_m$$

Lineær uavhengighet. Vektorene  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  er lineært uavhengige hvis

$$\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$$

Basis.  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  i  $V$  er en basis for  $V$  hvis deres lineære spenn er hele  $V$  og de samtidig er lineært uavhengige.

Antall elementer i basisen er vektorrommets dimensjon. Underrom. Et underrom  $U$  av et (reelt) vektorrom  $V$  er en delmengde av  $V$  slik at for alle reelle tall  $\alpha$  og  $\beta$  og par av vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  i  $U$  gjelder at

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in U.$$

Lineærtransformasjon  $T: V \rightarrow V$  for et reelt vektorrom med basis  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Representeres av matrise  $A$  med elementer  $a_{ij}$  ved

$$T(\mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{b}_i$$

## Vektorer og matriser

Hvis  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  og  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , vil  $\mathbf{xy}^T$  være  $n \times m$ -matrisen med  $ij$ -element  $x_i y_j$ .

Radrom og kolonnerom. Det lineære spennet til radene (resp kolonnene) i en matrise  $A$

Nullrom. En vektor  $\mathbf{x} \in V$  er med i nullrommet til

en matrise  $A$  hvis  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Nullrommet  $\text{Null}(A)$  er mengden av alle slike vektorer. Radrom, kolonnerom og nullrom er alle underrom.

## Indreprodukt og norm

Definisjon og skrivemåter for indreprodukt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}, \text{ for } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Lengden av en vektor  $\mathbf{u}$  skrives  $\|\mathbf{u}\|_2$  og er definert som

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Lengden  $\|\mathbf{u}\|_2$  av  $\mathbf{u}$  kalles også 2-normen til  $\mathbf{u}$ . Et sett av vektorer  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  danner et ortogonalt system hvis

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j.$$

og er et ortonormalt system hvis også  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  for alle  $i$ . En ortogonal matrise er en matrise hvis sett av kolonner danner et ortonormalt system

## Projeksjon

Projeksjonen av en vektor  $\mathbf{w}$  på  $\mathbf{v}$  er gitt som

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Gram-Schmidt prosessen. La  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  være vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . For  $i = 2, \dots, k$  ( $\leq n$ ) la

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{w}_i), \quad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|_2}$$

Da er  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  (resp  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ) en ortogonal (resp ortonormal) basis for  $\text{Sp}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ .

Householder-matriser. La  $\mathbf{u}$  være en vektor slik at  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ . Den tilhørende Householdermatrisen er

$$H_{\mathbf{u}} = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

QR-faktorisering. La  $m \geq n$ . Matrisen  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kan faktoriseres som  $A = QR = \hat{Q}\hat{R}$ .  $Q = [\hat{Q}, V]$  er ortogonal  $m \times m$ ,  $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .  $R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

$\hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  er øvretriangular. QR-faktorisering beregnes enten ved Gram-Schmidt prosessen eller ved en serie av Householdertransformasjoner.

## Eigenverdier og egenvektorer

La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise.

$\lambda \in \mathbb{C}$  kalles en egenverdi til  $A$  med tilhørende egenvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , (der  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ) hvis

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Eigenverdiene til  $A$  nullpunkter for polynomet

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En  $n \times n$ -matrise  $A$  kalles diagonaliserbar hvis det fins en inverterbar matrise  $P$  og en diagonalmatrise  $D$  slik at

$$A = PDP^{-1}$$

Kolonnene i  $P$  vil da være egenvektorer til  $A$  og diagonalelementene i  $D$  vil være de tilsvarende egenverdier.

## Regresjon og Markovkjeder

Normalaligningene. Ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  der  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$  har generelt ingen løsning. Men  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  som minimerer  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$  er en løsning av

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

og er entydig hvis  $A^T A$  er inverterbar.

Markovkjeder. En Markovprosess har en overgangsmatrise  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hvis elementer er sannsynligheter  $0 \leq a_{ij} \leq 1$  og  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  for alle  $j$ . Løsningen av  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$  som oppfyller  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  angir tilstandssannsynligheter når antall skritt (tiden) går mot uendelig, gitt at matrisen  $A$  er regulær.

## Systemer av differensialligninger

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Hvis  $A$  er diagonaliserbar, har reelle egenverdier  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , og egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  er generell løsning

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

for vilkårlige konstanter  $c_1, \dots, c_n$ .

La  $n = 2$  og anta at  $A$  har ikke-reelle egenverdier  $\lambda = \alpha + i\beta$  og  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  og egenvektorer  $\mathbf{v}$  og  $\bar{\mathbf{v}}$ . To lineært uavhengige reelle løsninger er

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t} (\text{Re}(\mathbf{v}) \cos \beta t - \text{Im}(\mathbf{v}) \sin \beta t)$$

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t} (\text{Re}(\mathbf{v}) \sin \beta t + \text{Im}(\mathbf{v}) \cos \beta t)$$

Ikke diagonaliserbar  $A$ ,  $n = 2$ .  $A$  har en dobbel reell egenverdi  $\lambda$  med egenvektor  $\mathbf{v}$ , da er både

$$e^{\lambda t} \mathbf{v} \text{ og } e^{\lambda t} (t\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

hvor  $\mathbf{w}$  løser  $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$ , løsninger av systemet.

## Matrise-eksponensialet

For en  $n \times n$ -matrise er eksponensialet definert som

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

System av differensialligninger  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  har løsning  $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$  der  $\mathbf{c}$  er en vektor av konstanter. Hvis  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  blir  $\mathbf{c} = \mathbf{y}_0$ .

Inhomogen ligning  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$  har løsning

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{f}(s)ds$$

der  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ .

## Singulærverdidekomposisjon (SVD)

For  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  fins ortogonale matriser  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  og  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  samt  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  der  $\Sigma_{ij} = 0, i \neq j$ , slik at

$$A = U\Sigma V^T.$$

$\Sigma_{ii} =: \sigma_i \geq 0$  er singulærverdier til  $A$ .  $\sigma_i^2$  er egenverdier til  $A^T A$  sortert i avtagende rekkefølge.  $V$  sine søyler  $\mathbf{v}_i$  er tilhørende normaliserte egenvektorer av  $A^T A$ .  $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$  der  $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$  for  $\sigma_i > 0$ . Antall  $\sigma_i \neq 0$  er  $r = \text{rank}(A)$ .

*Redusert SVD.* La  $\hat{U}$ , (resp  $\hat{V}$ ) være de  $r$  første søylene til  $U$  (resp  $V$ ). La  $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  være diagonalmatrisen med diagonal  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ . Redusert SVD er

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}$$