



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La M være matrisen gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

over \mathbb{R} . Den reduserte trappeformen av M er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i \mathbb{R}^4 er en basis for radrommet til M :

- (i) $\{(1, 0, 0, 1/3), (0, 1, 0, -5/3), (0, 0, 1, -1/3)\}$
- (ii) $\{(0, 0, 3, -1), (3, 0, 0, 1), (0, 3, 0, -5)\}$
- (iii) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

b) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i \mathbb{R}^4 er en basis for kolonnerommet til M :

- (i) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (ii) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (iii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i \mathbb{R}^4 er en basis for nullrommet til M :

$$(i) \left\{ \begin{bmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (ii) \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad (iii) \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2 La V være et vektorrom med to underrom W_1 og W_2 .

a) Hvilke av de følgende delmengdene av V er alltid et underrom av V :

- (i) $W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$.
- (ii) $W_1 \cup W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ eller } \mathbf{w} \in W_2\}$.
- (iii) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ og } \mathbf{w} \in W_2\}$.

b) La \mathcal{B}_1 og \mathcal{B}_2 være basis for henholdsvis W_1 og W_2 . Er følgende utsagn sant: Hvis $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, så er $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ en basis for $W_1 + W_2$.

3 La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Hva er karakteristisk polynom til matrisen A ?

- (i) $(2 - \lambda)^3$.
- (ii) $8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$.
- (iii) $8 - 4\lambda + 2\lambda^3$.

b) Hvor mange lineært uavhengige egenvektorer har A ?

- (i) 1
- (ii) 2
- (iii) 3

4 **Husk:** En $n \times n$ matrise M er *symmetrisk* hvis

$$M = M^T = \text{den transponerte matrisen av } M.$$

La M være en symmetrisk $n \times n$ -matrise over \mathbb{R} og $r \in \mathbb{R}$.

a) Hvilke av de følgende matriser er symmetrisk?

- (i) $M + M^T$
- (ii) MM^T
- (iii) rM

b) La M være en symmetrisk 3×3 -matrise. Hvis det fins en invertibel 3×3 -matrise P slik at

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da kan en vise at 3 er en egenverdi for M . Hva er dimensjonen til egenrommet for egenverdien 3?

- (i) 1
- (ii) 2
- (iii) 3