



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

- 1 La  $V = \mathbb{P}_4$  være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent  $x$  av grad høyst 4 med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ . La  $T: V \rightarrow V$  være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = xf'(x)$$

for et polynom  $f(x)$  i  $V$ , der  $f'(x)$  er den deriverte av polynomet  $f(x)$  med hensyn til  $x$ .

- a) Kjernen til  $T$  er gitt ved:
- (i)  $\{0\}$ .
  - (ii)  $\text{Span}(\{1\})$ .
  - (iii)  $\text{Span}(\{3\})$ .
- b) Rekkevidden til  $T$  er gitt ved:
- (i)  $\text{Span}(\{1, x, x^2, x^3\})$ .
  - (ii)  $\text{Span}(\{x, x^2, x^3, x^4\})$ .
  - (iii)  $\text{Span}(\{x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$ .
- c) Lineærtransformasjonen  $T$  er:
- (i) injektiv.
  - (ii) surjektiv.
  - (iii) injektiv og surjektiv.
  - (iv) verken injektiv eller surjektiv.
- d) Hvilke kombinasjoner av kjernen  $\text{Ker}(T)$  og rekkevidden  $\text{Ran}(T)$  kan ikke forekomme (avgjør dette uten eksplisitt utregning av  $\text{Ker}(T)$  og  $\text{Ran}(T)$ ):
- (i)  $\text{Ker}(T) = \text{Span}(\{1\})$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$ .
  - (ii)  $\text{Ker}(T) = \text{Span}(\{1\})$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{2x^2, 3x^3, 4x^4\})$ .
  - (iii)  $\text{Ker}(T) = \text{Span}(\{1\})$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{x, x^2, x^3, x^4\})$ .
- e) Lineærtransformasjonen  $T$  er
- (i) en isomorfi, fordi  $T(0) = 0$ .
  - (ii) ikke en isomorfi, fordi  $T(1) = 0$ .

- 2 La  $V = \mathbb{P}_4$  være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent  $x$  av grad høyst 4 med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ . La  $T: V \rightarrow V$  være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = x^4 f(1/x)$$

for et polynom  $f(x)$  i  $V$ .

a) Kjernen til  $T$  er gitt ved:

- (i)  $\{0\}$ .
- (ii)  $\text{Span}(\{1 + x + x^2 + x^3 + x^4\})$ .
- (iii)  $\text{Span}(\{1 - x\})$ .

b) Rekkevidden til  $T$  er gitt ved:

- (i)  $\text{Span}(\{x, x^2, x^3\})$ .
- (ii)  $\text{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$ .
- (iii)  $\text{Span}(\{1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$ .

c) Lineær transformasjonen  $T$  er:

- (i) injektiv.
- (ii) surjektiv.
- (iii) injektiv og surjektiv.
- (iv) verken injektiv eller surjektiv.

d) Hvilke kombinasjoner av kjernen  $\text{Ker}(T)$  og rekkevidden  $\text{Ran}(T)$  kan ikke forekomme (avgjør dette uten eksplisitt utregning av  $\text{Ker}(T)$  og  $\text{Ran}(T)$ ):

- (i)  $\text{Ker}(T) = \{0\}$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$ .
- (ii)  $\text{Ker}(T) = \text{Span}(\{1 + x + x^2 + x^3 + x^4\})$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$ .
- (iii)  $\text{Ker}(T) = \text{Span}(\{1 + x^4, x + x^3, x^2\})$  og  $\text{Ran}(T) = \text{Span}(\{x, x^2, x^3\})$ .

- 3 La  $V = \mathbb{P}_4$  være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent  $x$  av grad høyst 4 med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ . Både  $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  og  $\mathcal{B}_2 = \{1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4\}$  er basis for  $V$  som vektorrom over  $\mathbb{R}$ .

a) Koordinatvektoren for  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$  med hensyn på  $\mathcal{B}_1$  er:

- (i)  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .
- (ii)  $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ .
- (iii)  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .

b) Koordinatvektoren for  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$  med hensyn på  $\mathcal{B}_2$  er:

- (i)  $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ .
- (ii)  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .
- (iii)  $(1, -2, 4, -3, 1)$ .

4 La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon for et vektorrom  $V$  der  $\dim V = r < \infty$ . Hvilke(n) påstand, om noen, skal ut for at alle påstandene skal være ekvivalente:

- (i)  $T$  er injektiv.
- (ii)  $T$  er surjektiv.
- (iii)  $T$  er injektiv og surjektiv.
- (iv)  $T$  er en isomorfi.
- (v)  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .
- (vi)  $\text{Ran}(T) = V$ .