TMA4422 Matematikk 3C
Vår 2026

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Flervalgsoppgavene 6**

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av polynomer i en variable $x$ med koeffisienter i $\mathbb{R}$ av høyst grad 3 med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ gitt ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$$

for to polynomer $f(x)$ og $g(x)$ i $V$. Mengden $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ er en basis for $V$.

**a)** Hvilken av de følgende mengdene er konstruert ved hjelp av Gram-Schmidt-prosessen med start vektor 1?

(i) $\{1, x, x^2, x^3\}$

(ii) $\{1, x, x^2 - \frac{4}{3}, x^3 - \frac{12}{5}x\}$

(iii) $\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}x, \frac{3\sqrt{5}}{8}(x^2 - \frac{4}{3}), \frac{5\sqrt{7}}{16}(x^3 - \frac{12}{5}x)\}$

**b)** La $W$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner på intervallet $[-2, 2]$ med det samme indreproduktet som for $V$. Hva er projeksjonen av $\cos(x)$ ned på underrommet $V$ av $W$?

(i) $0.45465 + 0.077004x^2$

(ii) $0.45465 + 0.44374x^2$

(iii) $0.45465 - 0.44374\frac{3\sqrt{5}}{8}(x^2 - \frac{4}{3})$

$\boxed{2}$ La $W$ være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ og et underrom $V \subseteq W$ slik at $\{0\} \neq V$ og $V \neq W$. La $P \colon W \to W$ være projeksjonen av $W$ ned på $V$, dvs. $P(\mathbf{w}) = \mathsf{proj}_V(\mathbf{w})$ for alle $\mathbf{w} \in W$.

**a)** Hva er rekkevidden til lineærtransformasjonen $P$?

(i) $W$

(ii) $V$

(iii) $\{\mathbf{0}\}$

**b)** Hva er kjernen til $P$?

(i) $\mathsf{Ker}(P) = \{\mathbf{u} \in W \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in V\}$
(ii) $\mathsf{Ker}(P) = V^{\perp}$
(iii) $\mathsf{Ker}(P) = \{\mathbf{0}\}$

**c)** Hvis $\dim W = 4$ and $\dim V = 3$, da har to vektorer $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ i $W$ med $P(\mathbf{w}_1) = P(\mathbf{w}_2)$ egenskapen at

(i) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid nullvektorer.
(ii) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid ortogonale.
(iii) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid parallelle.

$\boxed{3}$ La $W$ være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ og et endelig-dimensjonalt underrom $V \subseteq W$. La $P\colon W \to W$ være projeksjonen av $W$ ned på $V$, dvs. $P(\mathbf{w}) = \mathsf{proj}_V(\mathbf{w})$ for alle $\mathbf{w} \in W$.

**a)** For $\mathbf{w} \in W$ hva er avstanden $\|\mathbf{w} - P(\mathbf{w})\|$?

(i) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|$ for alle $\mathbf{u} \in V^{\perp}$.
(ii) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
(iii) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\|$ for alle $\mathbf{v} \in V$.

**b)** Hva er lineærtransformasjonen $P^2 = P \circ P$?

(i) $0$
(ii) identitetsavbildningen fra $W$ til $W$
(iii) $P$

**c)** For $\mathbf{w} \in W$, hvilket uttrykk nedenfor skriver $\mathbf{w}$, som en sum av et element fra $V$ og et element fra $V^{\perp}$?

(i) $P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - P(\mathbf{w}))$
(ii) $2P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - 2P(\mathbf{w}))$
(iii) $-P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} + P(\mathbf{w}))$

$\boxed{4}$ La $V$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ med indre-produkt

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx.$$

Mengden $S = \{\sin(n\pi x), \cos(n\pi x)\}_{n=1}^{10}$ er en ortonormal mengde av vektorer i $V$, spesielt lineært uavhengige. La $U$ være underrommet av $V$ utspent av vektorene i $S$.

La $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x \le 0, \\ -x + 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

Vi har at

$$\int_{-1}^{0} (x + 1)\sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} (-x + 1)\sin(n\pi x)dx = 0$$

og

$$\int_{-1}^{0} (x + 1)\cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} (-x + 1)\cos(n\pi x)dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}(1 - \cos(n\pi))$$

**a)** Projeksjonen av $f(x)$ ned på $\sin(\pi x)$ er lik

(i) $0$

(ii) $\frac{4}{\pi^2}\sin(\pi x)$

(iii) $\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)$

**b)** Projeksjonen av $f(x)$ ned på $\cos(\pi x)$ er lik

(i) $0$

(ii) $\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x)$

(iii) $\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)$

**c)** Projeksjonen av $f(x)$ ned på $U$ er lik

(i) $\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{4}{3\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{4}{5\pi^2}\cos(5\pi x) + \frac{4}{7\pi^2}\cos(7\pi x) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(9\pi x)$

(ii) $\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{4}{25\pi^2}\cos(5\pi x) + \frac{4}{49\pi^2}\cos(7\pi x) + \frac{4}{81\pi^2}\cos(9\pi x)$

(iii) $\frac{4}{4\pi^2}\cos(2\pi x)+\frac{4}{16\pi^2}\cos(4\pi x)+\frac{4}{36\pi^2}\cos(6\pi x)+\frac{4}{64\pi^2}\cos(8\pi x)+\frac{4}{100\pi^2}\cos(10\pi x)$