Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	TMA4422 Matematikk 3C Vår 2026 **Flervalgsoppgavene 9**

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 Løsningen til en ordinær differensialligning $y' = f(t, y)$ blir tilnærmet ved hjelp av den følgende Runge–Kutta metoden:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2),$$

der

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n), \\ K_2 &= f(t_n + h, u_n + hK_1). \end{aligned}$$

a) Butcher tablået for metoden er gitt ved

(i)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

b) Hvis $f(t, y) = f(y)$, da er den globale avbruddsfeilen $\tau(h)$ av orden

(i) 1
(ii) 2
(iii) 3

c) Hvis $f(t, y) = f(y)$, da er metoden av orden

(i) 1
(ii) 2
(iii) 3

2 Løsningen til den ordinære differensialligningen $y' = f(t, y)$ blir tilnærmet ved en Runge–Kutta metoden som er implementert i python:

```python
def RKF(odefile, iv, h, N):
    solRKF=np.zeros((iv.size, N+1))
    solRKF[:,0]= iv
    t0=0.0
    tt=np.zeros(N+1)
    for n in range(N):
        tn=t0+n*h
        sol_o=solRKF[:,n]
        k1=odefile(tn,sol_o)
        k2=odefile(tn+1/3*h,sol_o+1/3*h*k1)
        k3=odefile(tn+h,sol_o-h*k1+2*h*k2)
        sol_n=sol_o+1/6*h*k1+2/3*h*k2+1/6*h*k3
        solRKF[:,n+1]=sol_n
        tt[n+1]=tn+h
    return solRKF,tt
```

Butcher tablået for metoden er gitt ved

(i)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ 1 & 2 & -1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{6} & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{6} & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

$\boxed{3}$ Det følgende Butcher tablået beskriver en Runge-Kutta metode, men hvilken?

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

(i)

$$u_{n+1} = u_n + hK_2 + \frac{1}{2}hK_3,$$

der

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n), \\ K_2 &= f(t_n + \frac{1}{3}h, u_n + \frac{1}{4}hK_1), \\ K_3 &= f(t_n + \frac{2}{3}h, u_n + \frac{1}{2}hK_1 + \frac{1}{h}K_2). \end{aligned}$$

(ii)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{3}(2K_1 + 1K_2),$$

der

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n), \\ K_2 &= f(t_n + h, u_n + hK_1), \\ K_3 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{4}h(K_1 + K_2)). \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Gitt det følgende lineære systemet av differensialligninger

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t).$$

a) Skriv ned baklengs Euler for dette systemet.

(i)

$$\begin{aligned} u_{n+1,1} &= u_{n,1} + h(u_{n,1} + 2u_{n,2}), \\ u_{n+1,2} &= u_{n,2} + h(3u_{n,1} + 4u_{n,2}). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_{n+1,1} &= u_{n,1} + h(u_{n,1} + 2u_{n+1,2}), \\ u_{n+1,2} &= u_{n,2} + h(3u_{n+1,1} + 4u_{n,2}). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} u_{n+1,1} &= u_{n,1} + h(u_{n+1,1} + 2u_{n+1,2}), \\ u_{n+1,2} &= u_{n,2} + h(3u_{n+1,1} + 4u_{n+1,2}). \end{aligned}$$

b) Bruk baklengs Euler med steglengde $h = 0.5$ for å finne en tilnærmet verdi for $\mathbf{y}(1.5)$, hvis $\mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(i) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ Gitt den følgende andre ordens differensialligningen

$$y''(t) = y'(t) - y(t).$$

a) Skriv ned leap-frog metoden for dette systemet.

(i)

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} &= u_n - v_n, \\ \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} &= v_n. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} &= v_n - u_n, \\ \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} &= v_n. \end{aligned}$$

b) Gitt u_0 og v_0, finn et uttrykk for u_{-1} og u_1.

(i)

$$\begin{aligned} u_{-1} &= \frac{1}{2}\left((h^2 - 2h)v_0 + (2 + h^2)u_0\right), \\ u_1 &= \frac{1}{2}\left((2h + h^2)v_0 + (2 + h^2)u_0\right). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_{-1} &= \frac{1}{2}\left((h^2 - 2h)v_0 + (2 - h^2)u_0\right), \\ u_1 &= \frac{1}{2}\left((2h + h^2)v_0 + (2 - h^2)u_0\right). \end{aligned}$$

c) Bruk leap-frog metoden med steglengde $h = 1$ for å finne en tilnærmet verdi for $(y(2), y'(2))$, hvis $(y(1), y'(1)) = (1, \frac{7}{3})$.

(i) $(2, 4)$ (ii) $(2, 2)$ (iii) $(4, 2)$