Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4422 Matematikk 3C
Vår 2026

Innlevering 1

Innleveringsfrist: fredag 30.01.2026, kl. 16:00.

Du leverer besvarelsen din som **en pdf-fil**. Innleveringer levert i feil format underkjennes.

Obs: Godkjent betyr at man hadde bestått hvis innleveringen utgjorde en eksamen. Som ved eksamen må alle svar begrunnes. I tillegg må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La $\mathcal{M}_n$ utgjøre vektorrommet av komplekse $n \times n$-matriser og vis at mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & & & \text{\Large 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ for } 1 \leq j \leq i \leq n \right\}$$

av nedre triangulære $n \times n$-matriser er et underrom av $\mathcal{M}_n$.

Hver reell $m \times n$ matrise A definerer en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og det gjelder for

- nullrommet til A: $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Ker} T$ og en skriver også $\operatorname{Ker} A$ istedenfor $\operatorname{Nul} A$.
- søylerommet til A: $\operatorname{Col} A = \operatorname{Ran} T$ og en skriver også $\operatorname{Ran} A$ istedenfor $\operatorname{Col} A$.

Dessuten betegnes søylerommet til en matrise også som kolonnerommet.

I tillegg til kolonnerommet og nullrommet finnes også radrommet, $\operatorname{Row} A$, til matrisen A, som betegner underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radvektorene i $m \times n$ matrisen A.

$\boxed{2}$ Avgjør om vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i $\operatorname{Ker} A$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $\operatorname{Ran} A$?

3 Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 14 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 13 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene for begge matrisene.

Hvis A er en $m \times n$ matrise, så definerer vi den transponerte A^T av matrisen A til å være $n \times m$ matrisen man får ved å la rad nummer i fra A være søyle nummer i for den nye matrisen A^T.

4 La A være en reell 4×5-matrise. Begrunn svarene på følgende spørsmål.

a) Hva er maksimal mulig dimensjon til $\operatorname{Ran} A$?

b) Hvis $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$, hvor mange lineært uavhengige kolonner har A?

c) Hvis $A \neq 0$, hva er minste mulige antall lineært uavhengige rader i A?

d) Hva er $\dim(\operatorname{Row} A^T)$ når systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 3 frie parametre?

e) Kan $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$?

5 Du får oppgitt at $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er en lineærtransformasjon hvor

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

b) Finn ut om T er injektiv og/eller surjektiv.

6 Bestem $\operatorname{rank} B$ og $\operatorname{Ker} B$ når B er en $n \times n$-matrise med $\det B \neq 0$.

7 La V utgjøre et (reelt) underrom av de kontinuerlige funksjonene fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ med basis

$$\mathcal{B} = \{1 \text{ (konstantfunksjon)}, \cos x, \cos(2x)\}$$

og la $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$T\colon a + b\cos(x) + c\cos(2x) \mapsto \begin{bmatrix} c \\ 2a + b \\ b - 3c \end{bmatrix}.$$

a) Vis at $\sin^2(x)$ og $\cos^2(x)$ ligger i V ved å finne koordinatene til disse funksjonene med hensyn på $\mathcal{B}$.
(*Hint: Trigonometriske halvvinkel-formler.*)

b) Er T en lineærtransformasjon?

c) Er V isomorf med $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{8}$ Anta at $S\colon W \to V$ er en invers til en lineærtransformasjon $T\colon V \to W$. Per definisjon vil det si at S er en lineærtransformasjon som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} S(T(v)) &= v \qquad \text{for alle } v \in V, \text{ og} \\ T(S(w)) &= w \qquad \text{for alle } w \in W. \end{aligned}$$

a) Hvilken av egenskapene over beskriver at T er injektiv, og hvilken egenskap beskriver at T er surjektiv?

b) Hva blir $\operatorname{Ran} T$?

c) Er S en isomorfi mellom W og V?