

Problem 7

We want to numerically evaluate the integral

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{where} \quad f(x) = \sin(x^2),$$

with the Simpson method such that the approximation error is smaller than 0.001. What is the largest value of the step size h that this accuracy is guaranteed? Use this h to compute a numerical approximation of the above integral by the Simpson method. (Use only 4 decimals in your computations). (Hint: You can use that $\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| \leq 30$).

Feilestimat (fra formelark):

$$\varepsilon \leq \frac{h^4}{16} \cdot \frac{1}{180} \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{h^4}{16} \frac{30}{180} = \frac{h^4}{96}$$

$$\text{Vi vil ha } \frac{h^4}{96} < 0,001 \iff h < (0,096)^{\frac{1}{4}} \approx 0,5566$$

Vi kan ikke velge steglengden h fritt; h er bestemt av antall intervaller, M .

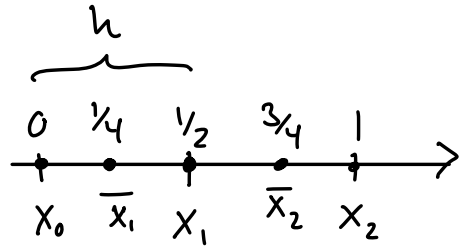
$$h = \frac{b-a}{M} = \frac{1}{M} < 0,5566$$

$$\iff M = \frac{1}{h} > \frac{1}{0,5566} \approx 1,7966$$

→ $M=2$ er minste mulige M som
garanterer $\varepsilon < 0,001$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{M} = 0,5$$

fra formelark



$$I_s^c(f) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{h}{6} \sum_{k=1}^M \left(f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k) \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right)$$

$$\approx 0,3099$$

Oppgave 4 La $y(x)$ være en funksjon, definert på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Funksjonen selv er ukjent, men funksjonsverdien er kjent i gitte punkter, oppgitt i tabellen under.

i	0	1	2
x_i	0	1/2	1
$y(x_i)$	1	2/3	1/2

- a) Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer $y(x)$ i punktene gitt i tabellen. Bruk dette til å finne en tilnærming til $y(3/4)$.
- b) Bruk polynomet $p(x)$ til å finne en tilnærming til integralet $\int_0^1 y(x) dx$. Bruk deretter trapesmetoden til å finne en annen tilnærming til samme integralet.

Den eksakte verdien av integralet er $\ln 2$. Hva blir feilen i de to approksimasjonene, og hvilken er best?

$$a) \quad \Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

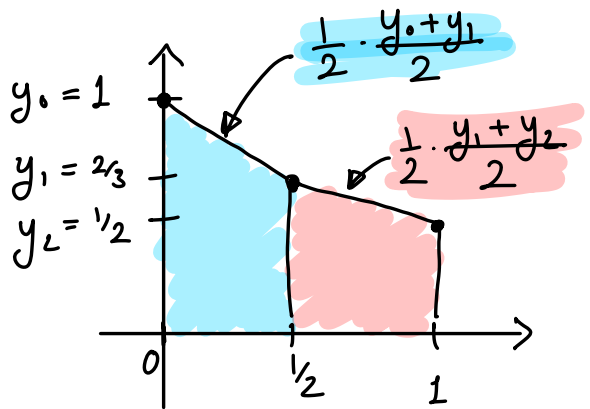
$$\begin{aligned}
 p(x) &= y(x_0) \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y(x_1) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
 &\quad + y(x_2) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
 &= 1 \cdot \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(-\frac{1}{2})(-1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(x - 0)(x - 1)}{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= \dots = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$$

$$y(3/4) \approx p(3/4) = \frac{9}{16} = 0,5625$$

$$\begin{aligned} b) \cdot \int_0^1 y(x) dx &\approx \int_0^1 p(x) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{25}{36} \approx 0,6944 \end{aligned}$$

• Trapesmetoden



$$\begin{aligned} \int_0^1 y(x) dx &\approx \frac{1}{2} \frac{1 + 2/3}{2} + \frac{1}{2} \frac{2/3 + 1/2}{2} \\ &= \frac{17}{24} \approx 0,7083 \end{aligned}$$

• Feil: polynom: $\left| \frac{25}{36} - \ln 2 \right| \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$

trapes: $\left| \frac{17}{24} - \ln 2 \right| \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$

Bruk av interpolasjonspolynom gir et mye bedre resultat.

Oppgave 7 La $Q[f]$ være en kvadraturregel som beregner en tilnærming til integralet

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx.$$

Om denne kvadraturregelen vet vi følgende: Det finnes en $s \in (a, b)$ slik at

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(s).$$

Forklar hva en kvadraturregels presisjonsgrad er, og finn presisjonsgraden til ovennevnte kvadraturregel.

- Presisjonsgraden til en kvadraturregel er det største heltallet $m \geq 0$ slik at tilnærmingen til integralet er nøyaktig lik det faktiske integralet for alle polynomer av grad $\leq m$.
- Siden $p^{(4)}(x) \equiv 0$ for alle polynomer av grad ≤ 3 , og

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(s) \quad (s \in (a, b))$$

så er $I[p] = Q[p]$ for slike polynomer.

$\Rightarrow$ presisjonsgraden er ≥ 3 .

La $p(x) = x^4$. Da er $p^{(4)}(x) = 4! \neq 0$
for alle x , så $I[p] - Q[p] \neq 0$.

Dermed er presisjonsgraden lik 3.

Problem 1 Interpolation [10 pts]

Find the trigonometric polynomial $t(x)$ of the form

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x,$$

which interpolates the following values

x_i	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
y_i	2	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2

$$\left(\begin{array}{lll} \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(0) = 1 \\ \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 & \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(0) = 0 \end{array} \right)$$

$$t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = c_0 + \cancel{0 \cdot c_1} - \cancel{c_2} - c_3 + \cancel{0 \cdot c_4} = 2 \quad (1)$$

$$t\left(-\frac{\pi}{4}\right) = c_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{c_2} + \cancel{0 \cdot c_3} - \cancel{c_4} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$t(0) = c_0 + c_1 + \cancel{0 \cdot c_2} + c_3 + \cancel{0 \cdot c_4} = 0 \quad (3)$$

$$t\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{c_2} + \cancel{0 \cdot c_3} + \cancel{c_4} = \sqrt{2} \quad (4)$$

$$t\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_0 + \cancel{0 \cdot c_1} + \cancel{c_2} - c_3 + \cancel{0 \cdot c_4} = 2 \quad (5)$$

→ løst systemet

Kan også utnytte symmetri til å forenkle systemet:

$$(5)-(1): 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(4)-(2): 2c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} c_0 - c_3 = 2 \\ c_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 = \sqrt{2} \\ c_0 + c_1 + c_3 = 0 \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{enkler} \\ \text{system} \end{array}$$

$$\text{løsning: } c_0 = 0, c_1 = 2, c_3 = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\cos(x) - 2\cos(2x)$$