

Oppgave 4

La  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$  være vektorer i  $\mathbb{R}^3$ .

a) Skriv vektoren  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$  som en lineærkombinasjon av  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , og  $\mathbf{w}$ .

b) Kan man skrive vektoren  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  som en lineærkombinasjon av  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , og  $\mathbf{w}$ ?

c) Er  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  lineært uavhengig?

d) Hva er determinanten av matrisen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ?

a) må finne  $a, b, c \in \mathbb{R}$  slik at

$$\vec{p} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b + 3c \\ 2a + 4b + 6c \\ a + 6b - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & -1 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 5c = 8 \\ b - c = -3 \end{array} \right\} \text{ f.eks. } c = 0, \\ a = 8 \text{ og } b = -3$$

$$\Rightarrow \vec{p} = 8\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$  nei,  $\vec{q}$  kan ikke skrives som en linearkomb. av  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$ .  $0=1 \downarrow$

c) nei, for 3 lin. uavh. vektorer i  $\mathbb{R}^3$  er en basis for  $\mathbb{R}^3$ , men (b) viser at  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  ikke spenner  $\mathbb{R}^3$ .

$\left\{ \begin{array}{l} \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ lin. uavh.} \\ \Rightarrow \text{kan fullføres til en basis.} \\ \text{Men, en basis for } \mathbb{R}^3 \text{ har nøyaktig 3} \\ \text{vektorer, så } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ må være en basis.} \end{array} \right.$

d)  $\left\{ \begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ \Leftrightarrow \text{kolonnene til } A \text{ er lin. uavh.} \\ \text{\u2191 ikke tilfelle her (oppg. (c))} \\ \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b} \text{ har (for en hver } \vec{b}\text{)} \\ \text{en unik l\u00f8sning } (\vec{x} = A^{-1}\vec{b}) \\ \uparrow \text{ ikke tilfelle her:} \\ \text{(a) } \infty \text{ mange l\u00f8sninger} \\ \text{(b) ingen l\u00f8sning} \end{array} \right.$

Dermed m\u00e5 vi ha  $\det A = 0$ .

# Fra eksamen TMA4110 kont '25:

Oppgave 5 La  $\mathcal{M}_{2 \times 3}$  være vektorrommet bestående av reelle  $2 \times 3$ -matriser og la

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Vis at  $U$  er et underrom av  $\mathcal{M}_{2 \times 3}$ .

b) La  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T \left( \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Vis at  $T$  er surjektiv, men ikke injektiv.

a)  $\left\{ \begin{array}{l} U \text{ er et underrom} \\ \iff \alpha A + \beta B \in U \\ \text{for alle } A, B \in U \text{ og } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

La  $A = \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} e & f & e \\ g & h & g \end{bmatrix} \in U$   
og  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Da er

$$\alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f & \alpha a + \beta e \\ \alpha c + \beta g & \alpha d + \beta h & \alpha c + \beta g \end{bmatrix}$$

også i  $U$ .

↙ vilkårlig  
vektor

b) • surjektiv:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

velg f.eks.  $a=x_1, b=0, c=x_2, d=x_3$ .

$$\Rightarrow T\left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

• ikke injektiv:

$$T \text{ linear} \Rightarrow T(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a = -b \text{ og } c = d = 0$$

$$\text{så } T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} = T(\vec{0})$$

$$\left(\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}\right)$$

Oppgave 9 La

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = ax^2 + bx + c \text{ for koeffisienter } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av reelle polynomer av grad høyst 2.

- Vis at  $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definert ved

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} \quad \left( p'(x) = \frac{dp}{dx}(x), \quad p''(x) = \frac{d^2p}{dx^2}(x) \right)$$

er en lineærtransformasjon og • bestem  $\ker T$ .

- lineær: må vise:

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

for alle  $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  og  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$T(\alpha p + \beta q) = \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)(0) \\ (\alpha p + \beta q)'(1) \\ (\alpha p + \beta q)''(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha p(0) + \beta q(0) \\ \alpha p'(1) + \beta q'(1) \\ \alpha p''(2) + \beta q''(2) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\alpha p + \beta q)(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \\ (\alpha p + \beta q)''(x) = \alpha p''(x) + \beta q''(x) \end{array}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q(0) \\ q'(1) \\ q''(2) \end{bmatrix} = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

$$\bullet \underline{\ker T}: T(p) = \vec{0}$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad p'(x) = 2ax + b, \quad p''(x) = 2a$$

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2a+b \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p = 0$$

$$\text{Så } \ker T = \{0\}$$