

Oppgave 7

La \mathcal{M}_2 være vektorrommet bestående av alle reelle 2×2 -matriser, altså

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

og la \mathcal{P}_3 være vektorrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 3.

(a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for \mathcal{M}_2 (dette er standardbasisen for \mathcal{M}_2).

La $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$ være standardbasisen for \mathcal{P}_3 , og la $T: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + (b-d)x - (a+c)x^2 + (a+b-c-d)x^3.$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 - x^2 + x^3$$

(b) Finn standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T .

(c) Finn en basis for bildet til T og en basis for kjernen til T .

(d) Er T surjektiv? Er T injektiv?

bildet
= rekkevidden

a) Ser på vilkårlig lineærkomb.:

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \leftarrow \text{vilkarlig element i } \mathcal{M}_2$$

⇒ \mathcal{B} spenner \mathcal{M}_2

• lineært uavhengig fordi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇒ $a=b=c=d=0$

basisen for \mathcal{M}_2 ,
altså \mathcal{B}

b) $T: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$

$$[T]_{\mathcal{e} \leftarrow \mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c} [T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})]_{\mathcal{e}} & [T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})]_{\mathcal{e}} & \dots \end{array} \right]$$

uttrykt som koordinatvektorer
m.h.p. \mathcal{e} , basisen for \mathcal{P}_3

$$\begin{aligned} [T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})]_{\mathcal{e}} &= \left[\underbrace{2 - x^2 + x^3} \right]_{\mathcal{e}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-1) \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 \end{aligned}$$

$$[T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})]_{\mathcal{e}} = \left[x + x^3 \right]_{\mathcal{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$\vec{v} \in \mathcal{M}_2$

$$c) \underbrace{[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}}_{"A\vec{x}" } = [T(\vec{v})]_{\mathcal{C}} \quad ("A\vec{x} = \vec{b}")$$

{ rækkevidden til T
 ↕ via koordinatvektorer
søyleområdet til A

→ finner en basis for Col A

$$A \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

← kolonner med pivot-element $\neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tilsvarende
kolonner i A
danner en basis
for Col A

$$\left\{ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\}$$

er en basis for Ran T.

altså: $\{2 - x^2 + x^3, x + x^3, -x^2 + x^3\}$

• $\text{Ker } T \leftrightarrow \text{Nul } A$

$$\text{Nul } A = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\bar{x} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \bar{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for Nul A

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er koordinatvektoren til

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $\text{Ker } T$

d). $\text{Ran } T \neq \mathcal{P}_3$, siden

$$\dim(\text{Ran } T) = 3 < \dim \mathcal{P}_3 = 4$$

$\rightarrow T$ er ikke surjektiv

• $\text{Ker } T \neq \{\vec{0}\}$, så T er ikke injektiv.

Oppgave 5 • Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \quad q(t) = 1 + t^2 \quad \text{og} \quad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

- Finn så ut om p og q står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^2 f(k)g(k), \quad f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

- $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ er en basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$[p(t)]_{\mathcal{E}} = [2 - t]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$[q(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad [r(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \right) = -8 \neq 0,$$

så kolonnene (og dermed $p(t)$, $q(t)$ og $r(t)$) er lineært uavh.

$$\bullet \langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^2 p(k) q(k)$$

$$= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

$$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5$$

$$= 4 \neq 0,$$

så p og q står ikke ortogonalt
på hverandre.