# Eksamen TMA4110 kont. '21

**Oppgave 7**

La $\mathcal{M}_2$ være vektorrommet bestående av alle reelle $2 \times 2$–matriser, altså

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

og la $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 3.

(a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for $\mathcal{M}_2$ (dette er standardbasisen for $\mathcal{M}_2$).

La $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_3$, og la $T\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T\left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + (b - d)x - (a + c)x^2 + (a + b - c - d)x^3.$$

(b) Finn standardmatrisen $A$ til lineærtransformasjonen $T$.

(c) Finn en basis for bildet til $T$ og en basis for kjernen til $T$.

(d) Er $T$ surjektiv? Er $T$ injektiv?

# Eksamen TMA4110 høst '23

**Oppgave 5** • Avgjør om polynomene

$$p(t) = 2 - t, \qquad q(t) = 1 + t^2 \qquad \text{og} \qquad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikke i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynomer.

• Finn så ut om $p$ og $q$ står ortogonalt på hverandre med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f(k)g(k), \qquad f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$