Eksamen TMA4115 kont '24

Oppgave 10 La $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Vis direkte ved bruk av definisjoner at funksjonen

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$$

er et indreprodukt i $\mathbb{R}^2$.

<u>Må vise:</u> for alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ og $a, b \in \mathbb{R}$

1) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

2) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

3) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ og $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0.$

1) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = \underbrace{(a\vec{u} + b\vec{v})^T}_{= a\vec{u}^T + b\vec{v}^T} A \vec{w}$

$= a\vec{u}^T A \vec{w} + b\vec{v}^T A \vec{w}$

(matrisemult. er lineært)

$= a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

2) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T A \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2v_1 - v_2 \\ -v_1 + 4v_2 \end{bmatrix}$

$$= u_1(2v_1 - v_2) + u_2(-v_1 + 4v_2)$$

$$\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = v_1(2\underline{u_1} - \underline{u_2}) + v_2(-\underline{u_1} + 4\underline{u_2})$$

$$= \underline{u_1}(2v_1 - v_2) + \underline{u_2}(-v_1 + 4v_2)$$

$$= \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

3) $$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = u_1(2u_1 - u_2) + u_2(-u_1 + 4u_2)$$

$$= 2u_1^2 - 2u_1u_2 + 4u_2^2$$

$$= (u_1 - u_2)^2 + u_1^2 + 3u_2^2 \geq 0$$

og $= 0 \iff \begin{cases} (u_1 - u_2)^2 = 0 \\ u_1^2 = 0 \\ 3u_2^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 = 0$ og $u_2 = 0$,

altså $\bar{u} = \bar{0}$

Eksamen TMA4110 høst '14

Oppgave 4 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Hva er egenverdiene til A?

b) For hver egenverdi, finn en tilsvarende egenvektor.

c) Finn en basis til $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

d) Finn en *ortonormal* basis til $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

e) Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $D = P^{\mathrm{T}}AP$.

a) $\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^3 - 3(\lambda-2) + 2$

$$= \cdots = \lambda(\lambda-3)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 3$

b) • $\underline{\lambda_1 = 0}$: Løs $(\lambda_1 I - A)\vec{v} = \vec{0}$ $(\Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda_1\vec{v})$

\# egenvektorer $= \dim(\mathrm{Nul}(\lambda_1 I - A))$

$0 \cdot I - A \leftarrow$ $\underbrace{\dim(\mathrm{Col}(0 \cdot I - A))}_{\text{ser at } \geq 2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Nul}(0 \cdot I - A))}_{\text{må være } \geq 1} = 3$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}$$

$\longrightarrow$ må være $= 1$

$\Rightarrow$ 1-dim. egenrom

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Man må ikke ressonere slik, man kan bare løse lignings-systemene, men dette er en fin måte å finne dimensjonene til egenrommene på.

• $\underline{\lambda_2 = 3:}$

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Col}(3I-A))}_{\text{ser at } = 1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Nul}(3 \cdot I - A))}_{\text{må være } = 2} = 3$$

$\Rightarrow$ 2-dim. egenrom

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{3 \cdot I - A}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer for A, fordi:

$E_0 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{v} = 0\vec{v}\}$

• $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for E_0 og $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for E_3.

- vektorer fra forskjellige egenrom er lineært uavhengige.
- $\dim E_0 + \dim E_3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

d) A er <u>symmetrisk</u> ($A^T = A$), så vektorer fra forskjellige egenrom står ortogonalt på hverandre.

Det holder dermed å finne ortonormale basiser for E_0 og E_3.

- <u>E_0:</u> $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normaliser}} \vec{q} := \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

- <u>E_3:</u> $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Gram-Schmidt:

$\vec{m}_1 := \vec{b}_1$ og $\vec{q}_1 := \frac{\vec{m}_1}{\|\vec{m}_1\|} = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{m}_2 := \vec{b}_2 - \underbrace{\langle \vec{q}_1, \vec{b}_2 \rangle}_{= \vec{q}_1 \cdot \vec{b}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \vec{q}_1$$

$$\Rightarrow \vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{q}_2 := \frac{\vec{m}_2}{\|\vec{m}_2\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \{\vec{q}, \vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ er en ortonormal basis av egenvektorer.

e) Vet fra teorien at $A = PDP^T$ og $P^{-1} = P^T$, med

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

og $P = [\vec{q} \;\; \vec{q}_1 \;\; \vec{q}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{P^TAP}}{P^{-1}AP} = P^{-1}(PDP^{-1})P = \underbrace{(P^{-1}P)}_{I} D \underbrace{(P^{-1}P)}_{I} = D$$