

Flervalgsoppgavene**Oppgave 1**

La

$$M = \begin{bmatrix} -11 & -14 & 0 \\ 12 & 15 & 0 \\ -8 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hvilke av de følgende påstandene er sanne?

(i) $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen M .

☐ sann☐ usann

(ii) $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen M .

☐ sann☐ usann

(iii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen M .

☐ sann☐ usann

(iv) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen M .

☐ sann☐ usann

Oppgave 2

La V være et reelt vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

For to ikke-null vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, så er $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ parallelle dersom vinkelen θ mellom dem er 0 eller π , dvs.

$$1 = |\cos(\theta)| = \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være vektorer i V hvor

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= 2, \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= 4, \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= 2, \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle &= 2.\end{aligned}$$

Hvilke av de følgende påstandene er sanne?

(i) $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ er parallell med $\mathbf{v}$.

☐ sann

☐ usann

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ er parallell med $\mathbf{v}$.

☐ sann

☐ usann

Langsvarsoppgavene**Oppgave 1** La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om matrisen A er diagonaliserbar.**Oppgave 2** La $\mathbb{P}_1$ være vektorrommet av alle polynomer i én variabel x av grad høyst 1 med koeffisienter i $\mathbb{R}$, og la avbildningen $T: V \rightarrow V$ være gitt ved

$$T(a_0 + a_1x) = a_1 + a_0x.$$

Avgjør om avbildningen T er en lineærtransformasjon.**Oppgave 3** La $V = \mathbb{P}_2$ være vektorrommet av alle polynomer i én variabel x av grad høyst 2 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $T: V \rightarrow V$ være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(p(x)) = 2p(x) - p'(x)$$

for et polynom $p(x) \in V$.La $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ være en basis for V . Finn matriserepresentasjonen til T med hensyn på basisen B .**Oppgave 4** Gitt initialverdiproblemet

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0,$$

og anta at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er uendelig mange ganger deriverbar.Gitt $h > 0$, la $t_n = nh$ og betrakt følgende metode:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h(f(u_n) + f(u_n + hf(u_n))).$$

- a) La $f(y) = 1 + y^2$, $y_0 = 0$, og $h = 0,1$. Utfør ett skritt med den gitte metoden for å finne en numerisk approksimasjon til $y(0,1)$.

- b) La nå f være en vilkårlig funksjon som er uendelig mange ganger deriverbar, og definer den lokale avbruddsfeilen til den gitte metoden som

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - u_{n+1}^*}{h},$$

der

$$u_{n+1}^* = y(t_n) + \frac{1}{2}h \left(f(y(t_n)) + f(y(t_n) + hf(y(t_n))) \right).$$

La $y_n = y(t_n)$. Du får opplyst at

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}^*}{h} &= (y'(t_n) - f(y_n)) + \frac{1}{2}(y''(t_n) - f(y_n)f'(y_n))h \\ &\quad + \left(\frac{1}{6}y'''(t_n) - \frac{1}{4}[f(y_n)]^2 f''(y_n) \right) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Ta det som utgangspunkt for å vise at

$$\tau_{n+1}(h) = (C_1[f'(y_n)]^2 f(y_n) + C_2 f''(y_n)[f(y_n)]^2)h^2 + O(h^3),$$

og finn konstantene C_1 og C_2 .

Oppgave 5 Gitt funksjonen $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

- a) Finn polynomet p_2 av grad mindre eller lik 2 som interpolerer f i nodene $x_0 = 10$, $x_1 = 11$ og $x_2 = 12$.
- b) Bruk formelen for feilen til interpolasjonspolynomet til å finne en øvre skranke for feilen i $x = 11,1$, dvs. en øvre skranke for

$$|p_2(11,1) - f(11,1)|.$$

Relevant formel:

Feilen til interpolasjonspolynomet på nodene $x_0, \dots, x_n$ med $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \dots, n$ er gitt ved

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \text{for en } \xi_x \in (a, b).$$

Oppgave 6

Funksjonen $F(x)$ er definert slik: $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$.

- a) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen F , og angi konvergensintervallet til denne rekken.
- b) Bestem en tilnærmingsverdi til $F(1)$ med feil mindre enn 10^{-2} .