

Flervalgsoppgavene**Oppgave 1**

$$\text{La } M = \begin{bmatrix} -11 & -14 & 0 \\ 12 & 15 & 0 \\ -8 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Usann.

Siden

$$M \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

og dette ikke er lik $\lambda \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ for en skalar λ , så er $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ikke en egenvektor for M .

(ii) Sann.

Siden

$$M \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

så er $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ en egenvektor for M med egenverdi 3.

(iii) Usann.

Siden

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 27 \\ -19 \end{bmatrix}$$

og dette ikke er lik $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ for en skalar λ , så er $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ikke en egenvektor for M .

(iv) Usann.

Siden

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix}$$

og dette ikke er lik $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ for en skalar λ , så er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ikke en egenvektor for M .

Oppgave 2

To ikke-null vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er parallelle hvis vinkelen θ mellom de to vektorene er 0 eller π , dvs. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

(i) Sann.

Vi har

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 1 - 3 = -2, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} = \sqrt{4 - 2 \cdot 2 + 2} = \sqrt{2}, \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{2},\end{aligned}$$

slik at

$$|\langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle| = 2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \|\mathbf{v}\|$$

og $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ og $\mathbf{v}$ er parallelle.

(ii) Usann.

Vi har

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 1 + 3 = 4, \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 + 2} = \sqrt{10}, \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{2},\end{aligned}$$

slik at

$$|\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle| = 4 \neq \sqrt{20} = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\| \|\mathbf{v}\|$$

og $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ og $\mathbf{v}$ er ikke parallelle.

Langsvarsoppgavene

Oppgave 1 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet til A er gitt ved

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) [(\lambda - 3)(\lambda - 1) + 1] \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2.\end{aligned}$$

Detter medfører at A har egenverdiene $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Egenvektor for $\lambda_1 = 3$: Vi ser direkte at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende λ_1 .

Egenvektor for $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$: Vi løser det følgende lineære likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Det følger direkte fra dette at $x = 0$ og $y = -z$, slik at egenrommet for $\lambda_2 = 2$ er gitt ved

$$E(2) = \left\{ a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dette impliserer at 3×3 -matrisen A bare har to lineært uavhengige egenvektorer, ikke 3, så A er ikke diagonaliserbar.

Oppgave 2 La $p(x) = a_0 + a_1x$ og $q(x) = b_0 + b_1x$. Da er

$$\begin{aligned}T(p(x) + q(x)) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x) \\ &= (a_1 + b_1) + (a_0 + b_0)x \\ &= a_1 + a_0x + b_1 + b_0x \\ &= T(p(x)) + T(q(x))\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
 T(\alpha p(x)) &= T(\alpha a_0 + \alpha a_1 x) \\
 &= \alpha a_1 + \alpha a_0 x \\
 &= \alpha(a_1 + a_0 x) \\
 &= \alpha T(p(x))
 \end{aligned}$$

for en vilkårlig skalar α . Dette viser at T er en lineærtransformasjon.

Oppgave 3 La $B = \{b_0, b_1, b_2\} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Da er

$$\begin{aligned}
 T(b_0) &= 2 \cdot 1 - (1)' &= 2 &= 2b_0 \\
 T(b_1) &= 2(1+x) - (1+x)' &= 1+2x &= -b_0 + 2b_1 \\
 T(b_2) &= 2(1+x+x^2) - (1+x+x^2)' &= 1+2x^2 &= b_0 - 2b_1 + 2b_2
 \end{aligned}$$

Dette gir at

$$[T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

a) Fra $u_0 = 0$ og $h = 0,1$ følger det at

$$\begin{aligned}
 y(0,1) &\approx u_1 = u_0 + \frac{1}{2}h(f(u_0) + f(u_0 + hf(u_0))) \\
 &= \frac{1}{20}(f(0) + f(0,1)) = 0,05 \cdot 2,01 = 0,1005.
 \end{aligned}$$

b) Siden f er uendelig mange ganger deriverbar og $y'(t) = f(y(t))$, får vi

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= f'(y(t))y'(t) = f'(y(t))f(y(t)), \\
 y'''(t) &= f''(y(t))y'(t)f(y(t)) + f'(y(t))f'(y(t))y'(t) \\
 &= f''(y(t))[f(y(t))]^2 + [f'(y(t))]^2 f(y(t)).
 \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
 y'(t_n) - f(y_n) &= 0, \\
 y''(t_n) - f'(y_n)f(y_n) &= 0
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}y'''(t_n) - \frac{1}{4}[f(y_n)]^2 f''(y_n) &= \frac{1}{6}(f''(y_n)[f(y_n)]^2 + [f'(y_n)]^2 f(y_n)) - \frac{1}{4}[f(y_n)]^2 f''(y_n) \\ &= \frac{1}{6}f(y_n)[f'(y_n)]^2 - \frac{1}{12}f''(y_n)[f(y_n)]^2,\end{aligned}$$

der vi brukte $y(t_n) = y_n$. Dermed har vi vist at

$$\tau_1(h) = \left(\frac{1}{6}[f'(y_n)]^2 f(y_n) - \frac{1}{12}f''(y_n)[f(y_n)]^2\right)h^2 + O(h^3),$$

dvs. $C_1 = \frac{1}{6}$ og $C_2 = -\frac{1}{12}$.

Oppgave 5

a) Interpolasjonspolynomet blir

$$p_2(x) = \ln(10) + (\ln(11) - \ln(10))(x - 10) + \frac{\ln(12) - 2\ln(11) + \ln(10)}{2}(x - 10)(x - 11).$$

b) Ved bruk av feilformelen for interpolasjonspolynom, får vi for en vilkårlig $x \in [10, 12]$

$$\ln(x) - p_2(x) = \frac{1}{6} \left. \frac{d^3(\ln(y))}{dy^3} \right|_{y=\xi_x} (x - 10)(x - 11)(x - 12) \text{ for en } \xi_x \in (10, 12)$$

og

$$|p_2(11,1) - \ln(11,1)| \leq \frac{1}{6} \left(\max_{\xi_x \in [10,12]} \frac{2}{\xi_x^3} \right) \cdot 1,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1000} \cdot 1,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 3,3 \cdot 10^{-5}.$$

Vi konstaterer at feilformelen gir en ganske nøyaktig feilskranke her, siden $p_2(11,1) - \ln(11,1) = -2,47483 \cdot 10^{-5}$.

Oppgave 6

a) Ta utgangspunkt i taylorrekken for e^x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

som konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$. Sett $x = -t^2$ inn i denne, og vi får $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$,
 og videre $t^2 e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+2}}{k!}$. Vi får nå, ved leddvis integrasjon, rekken for $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(2k+3)k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k+1}}{(2k+1)(k-1)!},$$

som konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Rekken ovenfor konvergerer mot $F(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så

$$F(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)(k-1)!}.$$

Dette er en alternerende rekke, så ved å kutte av etter n ledd får vi en tilnæringsverdi for $F(1)$ der feilen er mindre enn absoluttverdien av ledd $n+1$, dvs. mindre enn $\frac{1}{(2n+3)n!}$. For å få dette mindre enn 10^{-2} må vi velge n så stor at $(2n+3)n! > 100$. Vi prøver med ulike verdier av n og får for $n = 3$, $9 \cdot 3! = 54$ (for lite) og for $n = 4$, $11 \cdot 4! = 264$ (stort nok).

Dvs. vi setter

$$F(1) \approx \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)(k-1)!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} \approx 0,19.$$