

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1 (i) Skal utsagnet være sant må det inhomogene lineære likningssystemet under ha en løsning.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 6 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & -8 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 6 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{r_1 + r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 5 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hvis det finnes en løsning (x_1, x_2, x_3, x_4) , så ser vi $x_4 = -1$. Systemet reduseres til følgende lineære likningssett:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 5 \\ -9 & -13 & 15 & -7 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2 \leftrightarrow r_1} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -9 & 5 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2 - 6r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + 4r_1} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

Vi ser at det siste inhomogene lineære systemet har for eksempel løsningen $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, som gir at det opprinnelige systemet har løsningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -1)$.

Dette medfører at $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$.

(ii) Skal utsagnet være sant må likningssystemet under ha en løsning.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & -1 & 0 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_1+r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{r_2-r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 8 & -9 & 0 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & 0 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

Systemet reduseres til

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 1 \\ -9 & -13 & 15 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2-2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -9 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2 \leftrightarrow r_1} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_2-6r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ -4 & -6 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+4r_1} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Den siste raden viser at systemet ikke er løsbart, slik at $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \text{Span}(S)$.

(iii) Utregningene i (i) (og (ii)) viser at rangen til matrisen $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -9 \\ -9 & -13 & 15 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ er 2, slik de tre første vektorene i S er allerede lineært avhengige og dermed er S selv lineært avhengig og (iii) er ikke sann.

Oppgave 2 Fra oppgave 18 (g) og (h) i bind 1 side 134, så er (i), (ii) og (iii) alltid like. Rangteoremet sier at (iii) og (iv) er like, dvs. alle tallene er like.

Langsvarsoppgaver

Oppgave 1 La $S = \{1, \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x)\}$. Siden S er en ortonormal mengde av vektorer, så er projeksjonen av $\sin(x)$ i V ned på underrommet U gitt ved

$$\langle 1, \sin(x) \rangle 1 + \langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle \sqrt{3}x + \langle \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1) + \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x).$$

Gitt at $\langle 1, \sin(x) \rangle = 0$ og $\langle x^k, \sin(x) \rangle = 0$ for k like, så følger at vi må beregne

$$\langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle \sqrt{3}x + \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x).$$

Fra de oppgitte formelene får vi at

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{3}x, \sin(x) \rangle &= \sqrt{3}(\sin(1) - \cos(1)) \\ \langle \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x), \sin(x) \rangle &= \frac{5\sqrt{7}}{2}(5\cos(1) - 3\sin(1)) - \frac{3\sqrt{7}}{2}(\sin(1) - \cos(1)) \\ &= 14\sqrt{7}\cos(1) - 9\sqrt{7}\sin(1) \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\text{proj}_U(\sin(x)) = 3(\sin(1) - \cos(1))x + \frac{7}{2}(14\cos(1) - 9\sin(1))(5x^3 - 3x).$$

Oppgave 2

Her må vi finne egenverdier og de tilhørende egenvektorene til matrisen A :

Egenverdier:

$$\begin{aligned} \det \left(\lambda I_3 - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Dette gir egenverdiene: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 2$.

Egenvektorer: Ser direkte at $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 2.

For $\lambda_1 = 3$, må vi løse følgende likningssystemer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

som har løsningen $(x, y, z) = (y, y, 4y) = y(1, 1, 4)$, og for $\lambda_2 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

hvor en umiddelbart ser at $(x, y, z) = (0, y, -3y) = y(0, 1, -3)$ er en løsning. Dette gir egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

med egenverdiene $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 2$, henholdsvis, som vi vet er lineært uavhengig siden alle egenverdiene er forskjellige. Dette gir at matrisen A er diagonaliserbar, og matrisen som

diagonaliserer A er gitt ved $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, dvs. 3×3 -matrisen med de tre egenvektorene

som kolonner. Da er

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1}x(t)$, dvs. $x(t) = Py(t)$. Innsatt i den opprinnelige likningen:

$$x'(t) = Py'(t) = APy(t) \Rightarrow y'(t) = P^{-1}APy(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dette gir løsningen $y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$, som gir at

$$x(t) = Py(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ 4c_1 e^{3t} - 3c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsen gir at

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ 4c_1 - 3c_2 + c_3 \end{bmatrix},$$

hvor vi ser at $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ og $c_3 = 3$. Dette gir at løsningen

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} + e^t \\ 4e^{3t} - 3e^t + 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3 La

$$S_3 = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

være standardbasisen in $\mathbb{R}^3$, og la

$$S_2 = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

være standardbasisen in $\mathbb{R}^2$. Vi ønsker å finne $[T]_{S_2 \leftarrow S_3}$. Vi har gitt at $T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Videre er

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette gir at

$$[T]_{S_2 \leftarrow S_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 Gitt initialverdiproblemet

$$\dot{y} = f(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

der $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er glatt. Metoden er gitt ved

$$u_{n+1} = u_n + h(\theta f(u_n) + (1 - \theta)f(u_{n+1})), \quad \theta \in (0, 1).$$

Den lokale avbruddsfeilen defineres som

$$h \cdot \tau_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h(\theta f(y(t_n)) + (1 - \theta)f(y(t_{n+1}))). \quad (4)$$

Med andre ord setter vi inn den eksakte løsningen $y(t)$ i metoden.

Vi bruker Taylorutvikling av $y(t)$ rundt t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3).$$

Siden $y'(t) = f(y(t))$, får vi

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3).$$

Videre utvikler vi

$$f(y(t_{n+1})) = f(y(t_n)) + hy''(t_n) + O(h^2),$$

der vi har brukt at

$$y''(t) = f'(y(t))f(y(t)).$$

Setter vi alt dette inn i (4), får vi

$$\begin{aligned} h \cdot \tau_{n+1} &= y(t_n) + hf(y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) \\ &\quad - y(t_n) - h(\theta f(y(t_n)) + (1 - \theta)(f(y(t_n)) + hy''(t_n) + O(h^2))), \end{aligned}$$

Til slutt får vi

$$h \cdot \tau_{n+1} = h^2 \left(\frac{1}{2} - (1 - \theta) \right) y''(t_n) + O(h^3) = h^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \right) y''(t_n) + O(h^3).$$

a) Den ledende feilen er av orden $O(h^2)$, altså

$$\tau_{n+1} = O(h).$$

Dermed har metoden minst orden 1 for alle $\theta \in (0, 1)$.

b) For å få orden 2 må h^2 -leddet forsvinne, altså

$$\theta - \frac{1}{2} = 0.$$

Dermed må

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

For denne verdien får vi $\tau_{n+1} = O(h^2)$, og metoden har derfor orden 2. Metoden blir da

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(y_{n+1})),$$

som er trapesmetoden.

Oppgave 5

Ved å kreve at kvadraturformelen er eksakt for monomene av grad høyst tre, altså 1, x , x^2 og x^3 , får vi ligningene:

$$\begin{aligned}w_0 + w_1 + w_2 + w_3 &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2, \\w_0(-1) + w_1\left(-\frac{1}{3}\right) + w_2\left(\frac{1}{3}\right) + w_3 &= \int_{-1}^1 x \, dx = 0, \\w_0(-1)^2 + w_1\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + w_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + w_3 &= \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}, \\w_0(-1)^3 + w_1\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + w_2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + w_3 &= \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0.\end{aligned}$$

Andre og fjerde ligning gir $w_3 - w_0 = \frac{1}{3}(w_1 - w_2)$ og $w_3 - w_0 = \frac{1}{27}(w_1 - w_2)$, og dermed er $w_3 = w_0$ og $w_1 = w_2$. Første og tredje ligning blir da

$$\begin{aligned}2w_0 + 2w_1 &= 2, \\2w_0 + \frac{2}{9}w_1 &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

og vi ser at dette ligningsystemet sammenfaller med den som er oppgitt i oppgaveteksten. Ved å løse systemet får vi $w_1 = w_2 = \frac{3}{4}$ og $w_3 = w_0 = \frac{1}{4}$.

Oppgave 6)

(i): Sett $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$. Da får vi $|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$. Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergerer (p -rekke med $p > 1$), så den oppgitte rekka konvergerer absolutt.

(ii): Sett $a_n = (-1)^n \frac{n!}{100^n}$. Da får vi $|a_{n+1}| = \frac{n+1}{100}|a_n|$, som medfører at

$$|a_{n+1}| > |a_n| \quad \text{for } n \geq 100.$$

Siden $|a_{100}| > 0$, følger det at $|a_n| \not\rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ og den oppgitte rekka er divergent.

Oppgave 7

a) Med $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ er $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Vi tar utgangspunkt i den geometriske rekka $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ som vi vet konvergerer for $|x| < 1$. $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ kan skrives som en rekke slik:

$$f'(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}.$$

Denne konvergerer også for $|x| < 1$.

Ledddvis integrasjon av denne rekka gir rekkeutviklingen for $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+2} x^{2k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^{2k}.$$

Ledddvis integrasjon bevarer konvergens på det åpne intervallet, men konvergens i endepunktene må sjekkes separat. For både $x = -1$ og $x = 1$ får vi rekka $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Dette er en alternerende rekke med monotont avtakende ledd som går mot 0, så rekka konvergerer ved testen for alternerende rekker. Rekka for $f(x)$ konvergerer altså for alle x i intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

b) Vi ser at $\ln\left(\frac{5}{4}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$. Vi vil bestemme n slik at $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ gir en tilnærmingsverdi til $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ med feil mindre enn 0.001. Siden vi her har en konvergent alternerende rekke, vet vi at dersom vi kutter av etter n ledd, vil restleddet være mindre enn absoluttverdien av ledd $n+1$ (det første leddet vi ikke tar med).

Vi vil altså finne ut hvor stor n vi må velge for at $\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} < 0.001$ som er det samme som at $(n+1)2^{2n+2} > 1000$. $n=2$ gir $3 \cdot 2^6 = 192$ og $n=3$ gir $4 \cdot 2^8 = 1024$. Vi må altså ha $n=3$ som gir $\ln \frac{5}{4} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.223958333... \approx 0.224$.