

1.1 Flervalg 1

La $S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 15 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$. Avgjør hvilken av de følgende påstandene er sanne:

Velg ett alternativ:

☐ $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$

☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Span}(S)$

☐ S er en lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^4$

Maks poeng: 5

1.2 Flervalg 2

For enhver reell $m \times n$ -matrise A , hvilke av de følgende tallene er alltid like?

i) dimensjonen til radrommet til A og dimensjonen til kolonnerommet til A

Velg ett alternativ

☐ ja

☐ nei

ii) dimensjonen til radrommet til A og antall pivoter i den reduserte trappeformen til A

Velg ett alternativ:

☐ ja

☐ nei

iii) dimensjonen til radrommet til A og n minus dimensjonen til nullrommet til A

Velg ett alternativ

☐ ja

☐ nei

iv) n minus dimensjonen til nullrommet til A og antall pivoter i den reduserte trappeformen til A

Velg ett alternativ

☐ ja

☐ nei

Maks poeng: 5

Oppgave 1 La V være indreproduktrommet av alle reelle kontinuerlige funksjoner definert på $[-1, 1]$, dvs.

$$V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kontinuerlig}\},$$

med skalarmultiplikasjon og addisjon gitt ved

$$\begin{aligned}(a \cdot f)(x) &= af(x) \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x)\end{aligned}$$

for alle $a \in \mathbb{R}$ og alle $f, g \in V$, og indreprodukt gitt ved

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

for alle $f, g \in V$.

Gitt den ortonormale mengden $S = \{1, \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x)\} \subset V$, la $U = \text{Span}(S)$. Beregn projeksjonen $\text{proj}_U(\sin(x))$.

En kan bruke uten bevis at

$$\int_{-1}^1 x^k \sin(x)dx = \begin{cases} 0, & k \text{ er like,} \\ 2 \sin(1) - 2 \cos(1) \approx 0.60234, & k = 1, \\ 10 \cos(1) - 6 \sin(1) \approx 0.35420, & k = 3. \end{cases}$$

Oppgave 2 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3 La $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon slik at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem matriserepresentasjonen til $T(\mathbf{x})$.

Oppgave 4 Gitt initialverdiproblemet

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

og anta at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er glatt.

La $y_n = y(t_n)$ og betrakt den følgende metoden

$$u_{n+1} = u_n + h(\theta f(u_n) + (1 - \theta)f(u_{n+1})) = g(u_n, u_{n+1}), \quad \theta \in (0, 1).$$

- a) Analyser den lokale avbruddsfeilen $\tau_n(h) = \frac{1}{h}(y_n - u_n^*)$, der $u_n^* = g(y_{n-1}, y_n)$ for å vise at metoden har minst orden 1 for alle $\theta \in (0, 1)$.
- b) Vis at metoden har orden 2 for én bestemt verdi av θ . Hvilken?

Oppgave 5 Den interpolasjonsbaserte kvadraturformelen for $n = 3$ på intervallet $[-1, 1]$ er gitt ved

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_0 f(-1) + w_1 f(-1/3) + w_2 f(1/3) + w_3 f(1).$$

Vis at kvadraturformelen er eksakt for alle polynomer f av grad mindre eller lik 3 hvis

$$\begin{aligned} 2w_0 + 2w_1 &= 2, \\ 2w_0 + \frac{2}{9}w_2 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

og bruk det til å bestemme vektene w_0 , w_1 , w_2 og w_3 .

Oppgave 6 Avgjør om rekkene nedenfor konvergerer, absolutt eller betinget, eller divergerer.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{100^n}$

Oppgave 7

- a) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. For hvilke x -verdier konvergerer rekken?
- b) Bruk rekken fra punkt a) til å bestemme en tilnærmingsverdi for $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ med feil mindre enn 0.001.