

**Flervalgsoppgaver****Oppgave 1**

La  $V$  være et reelt vektorrom med et indreprodukt  $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  være vektorer i  $V$  hvor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2,$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 3.$$

Hvilke av de følgende påstandene er sanne?

- (i)  $\mathbf{u}$  og  $-2\mathbf{v} + \mathbf{w}$  står ortogonalt på hverandre.

☐ sann

☐ usann

- (ii)  $3\mathbf{u} - \mathbf{w}$  og  $\mathbf{v}$  står ortogonalt på hverandre.

☐ sann

☐ usann

**Oppgave 2**

Hvis en reell matrise  $A$  med  $n$  rader er diagonaliserbar, hvilke av de følgende påstandene er alltid sanne?

- (i)  $A$  er en  $n \times n$ -matrise (kvadratisk matrise).

☐ sann

☐ usann

- (ii)  $A$  har  $n$  forskjellige egenverdier.

☐ sann

☐ usann

- (iii)  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer.

☐ sann

☐ usann

- (iv)  $A$  er en symmetrisk matrise.

☐ sann

☐ usann

**Langsvarsoppgaver****Oppgave 1** La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet), radrommet og nullrommet (kjernen) til  $A$ . Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene.

**Oppgave 2** La  $\mathbb{P}_2$  være vektorrommet av alle polynomer i én variabel  $x$  av grad høyst 2 med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ . La  $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$  og  $C = \{1, 1-x, 1-x+x^2\}$  være to basiser for  $\mathbb{P}_2$ . Finn  $[\text{id}]_{C \leftarrow B}$ , overgangsmatrisen fra basisen  $B$  til basisen  $C$ .

**Oppgave 3** La  $V = \mathbb{P}_2$  være vektorrommet av alle polynomer i én variabel  $x$  av grad høyst 2 med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ . La  $T: V \rightarrow V$  være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T(p(x)) = 2p(x) - p'(x) \quad \text{for et polynom } p(x) \in V.$$

Avgjør om lineærtransformasjonen  $T$  er injektiv, om den er surjektiv, og om den er en isomorfi.

**Oppgave 4**

La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 5** Gitt et initialverdiproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

sammen med følgende kode:

```
def method(odefile, iv, h, N):
    sol=np.zeros((iv.size,N+1))
    sol[:,0]= iv
    t0=0.0
    tt=np.zeros(N+1)
    for n in range(N):
        tn=t0+n*h
        sol_o=sol[:,n]
        k1=odefile(tn,sol_o)
        k2=odefile(tn+h/2,sol_o+h/2*k1)
        k3=odefile(tn+h,sol_o-h*k1+2*h*k2)
        sol_n=sol_o+h/6*(k1+4*k2+k3)
        sol[:,n+1]=sol_n
        tt[n+1]=tn+h
    return sol,tt
```

Skriv ned Runge–Kutta metoden som er implementert i denne koden, og finn det tilhørende Butcher tablået

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}.$$

**Oppgave 6** Gitt en uendelig mange ganger deriverbar funksjon  $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  som oppfyller  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 4$  og  $f(2) = 2$ .

- Finn polynomet  $p_2$  av grad mindre eller lik 2 som interpolerer  $f$  i nodene  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  og  $x_2 = 2$ .
- Anta at vi vet at  $|f^{(3)}(x)| \leq 2$  for alle  $x \in [0, 2]$ . Bruk dette, og formelen for feilen til interpolasjonspolynomet til å finne en øvre skranke for feilen

$$\max_{x \in [0, 2]} |p_2(x) - f(x)|.$$

Relevant formel:

Feilen til interpolasjonspolynomet på nodene  $x_0, \dots, x_n$  med  $x_j \in [a, b]$ ,  $j = 0, \dots, n$  er gitt ved

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \text{for en } \xi_x \in (a, b).$$

**Oppgave 7** Avgjør om rekkene nedenfor konvergerer eller divergerer.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2^n}}$$

**Oppgave 8** Bestem taylorrekkeutviklingen til  $f(x) = \ln(1 - x)$  om  $a = 0$ , og angi konvergensintervallet til denne rekken.