

Flervalgsoppgaver**Oppgave 1**

(i) Sann.

Vi har at

$$\langle \mathbf{u}, -2\mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, -2\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (-2)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (-2)1 + 2 = 0.$$

Dette medfører at $\mathbf{u}$ og $-2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ står ortogonalt på hverandre.

(ii) Sann.

Vi har at

$$\langle 3\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle 3\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle -\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (-1)\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 3 + (-1)3 = 0.$$

Dette medfører at $3\mathbf{u} - \mathbf{w}$ og $\mathbf{v}$ står ortogonalt på hverandre.**Oppgave 2**

(i) Sann.

En diagonaliserbar matrise er alltid en kvadratisk matrise, dvs. A er en $n \times n$ -matrise for en $n \geq 1$.

(ii) Usann.

Teorem 6 i seksjon 6.8 i bind 2 sier at hvis en $n \times n$ -matrise A har n forskjellige egenverdier, så er matrisen A diagonaliserbar. Men ikke alle diagonaliserbare $n \times n$ -matriser har forskjellige egenverdier. For eksempel, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ har $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ som egenverdier, men er helt klart diagonaliserbar siden den allerede er en diagonalmatrise.

(iii) Sann.

Teorem 1 og Teorem 3 i seksjon 6.8 i bind 2 sier til sammen at en $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer. Dette gir at (iii) alltid er sann.

(iv) Usann.

Teorem 3 i seksjon 7.4 i bind 2 sier at en reell symmetrisk $n \times n$ -matrise alltid har n lineært uavhengige egenvektorer, dvs. den er alltid diagonaliserbar. Men ikke alle diagonaliserbare matriser er symmetriske, for eksempel, matrisen A fra langsvarsoppgave 4 er diagonaliserbar, men ikke symmetrisk.

Langsvarsoppgaver

Oppgave 1 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Utfører elementære radoperasjoner på A for å finne den reduserte trappeformen av A :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(r_2 - r_3)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{9}(r_3 + 7r_2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - 3r_2 + 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ser at rangen til A er 3, slik at dimensjonen til radrommet og kolonnerommet (søylerommet) er begge 3. Nullrommet (kjernen) til A er gitt ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og dermed er dimensjonen til nullrommet (kjernen) av A lik 1 og $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for nullrommet (kjernen).

Pivotene til A forteller oss at $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for kolonnerommet (søylerommet) til A . En basis for radrommet til A er $\{(3, 2, 1, 2), (2, 1, 3, 6), (1, 3, 2, 4)\}$ eller $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2)\}$.

Oppgave 2 La

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

og

$$C = \{c_1, c_2, c_3\} = \{1, 1-x, 1-x+x^2\}.$$

Vi har at

$$\begin{array}{lll} b_1 = 1 & & = c_1 \\ b_2 = 1+x & = 2 \cdot 1 + (-1)(1-x) & = 2c_1 + (-1)c_2 \\ b_3 = 1+x+x^2 & = 2 \cdot 1 + (-2)(1-x) + 1(1-x+x^2) & = 2c_1 + (-2)c_2 + c_3 \end{array}$$

Dette gir at

$$[\text{id}]_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3*Alternativ 1:*La $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Anta $T(p(x)) = T(q(x))$, da får vi

$$2a_0 - a_1 + 2(a_1 - a_2)x + 2a_2x^2 = T(p(x)) = T(q(x)) = 2b_0 - b_1 + 2(b_1 - b_2)x + 2b_2x^2 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Det er bare mulig hvis

$$\begin{aligned} 2a_0 - a_1 &= 2b_0 - b_1 \\ a_1 - a_2 &= b_1 - b_2, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

som gir at $a_i = b_i$ for $i \in \{0, 1, 2\}$, dvs. $p(x) = q(x)$. Dermed er T injektiv.Gitt $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, får vi $T(p(x)) = q(x)$ for en $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ hvis og bare hvis

$$2a_0 - a_1 + 2(a_1 - a_2)x + 2a_2x^2 = T(p(x)) = q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dette er bare mulig hvis

$$\begin{aligned} 2a_0 - a_1 &= b_0, \\ 2(a_1 - a_2) &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

som gir

$$a_0 = \frac{1}{4}(2b_0 + b_1 + 2b_2), \quad a_1 = \frac{1}{2}(b_1 + 2b_2), \quad \text{og} \quad a_2 = b_2.$$

Siden $q(x)$ kan være et hvilket som helst polynom i $\mathbb{P}_2$, er T surjektiv.

Siden T er både injektiv og surjektiv, er T en isomorfi.

Alternativ 2:

La $S = \{1, x, x^2\}$, som er en basis for V . Da er

$$\begin{aligned} T(1) &= 2 \cdot 1 - (1)' = 2 \\ T(x) &= 2x - (x)' = 2x - 1 \\ T(x^2) &= 2x^2 - (x^2)' = 2x^2 - 2x \end{aligned}$$

og

$$A = [\text{id}]_{S \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har at $\det(A) = 8 \neq 0$, slik at A er en inverterbar matrise. Dette impliserer at T er både en injektiv og surjektiv lineærtransformasjon, dvs. T er en isomorfi.

Oppgave 4 Her må vi finne egenverdier og de tilhørende egenvektorene til matrisen A først.

Egenverdier:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 2 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Dette gir egenverdiene: $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorer: For $\lambda_1 = -2$, må vi løse det følgende likningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

som har løsningen $(x, y) = (x, -2x) = x(1, -2)$, og for $\lambda_2 = 5$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

hvor en umiddelbart ser at $(x, y) = (3y, y) = y(3, 1)$ er en løsning. Dette gir egenvektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 5$, henholdsvis, som vi vet er lineært uavhengige siden alle egenverdiene er forskjellige.

Dette gir at den generelle løsningen til $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Initialbetingelsen gir at

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 + 3c_2 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix},$$

hvor vi ser at $c_1 = 3$ og $c_2 = 2$. Dette gir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = 3e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5 Ifølge koden er den numeriske metoden gitt ved

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

der

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f(t_n + h, u_n - hk_1 + 2hk_2). \end{aligned}$$

Det tilhørende Butcher tablået ser slik ut

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Oppgave 6

a) Interpolasjonspolynomet blir

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(0) + (f(1) - f(0))x + \frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2}x(x-1) \\ &= 2 + 2x - 2x(x-1) \\ &= 2 + 4x - 2x^2. \end{aligned}$$

b) For $x \in [0, 2]$ er feilformelen for interpolasjonspolynomet gitt ved

$$f(x) - p_2(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_x)x(x-1)(x-2) \text{ for en } \xi_x \in [0, 2].$$

Utgangspunktet viser at $|x(x-1)(x-2)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ for $x \in [0, 2]$.

Derfor er

$$\max_{x \in [0, 2]} |p_2(x) - f(x)| \leq \frac{1}{6} \max_{\xi_x \in [0, 2]} |f^{(3)}(\xi_x)| \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}.$$

Oppgave 7

(i) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$, så $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$, og det betyr at rekken divergerer fordi ledd nummer n ikke går mot 0 når n går mot ∞ .

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{\sqrt{2^{n+1}}}}{\frac{n}{\sqrt{2^n}}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{\sqrt{2}}$, så $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Det betyr at rekken konvergerer ved sammenligningstesten.

Oppgave 8 Med $f(x) = \ln(1-x)$, blir $f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ for $|x| < 1$. Ved leddvis integrasjon av denne rekken får vi da

$$f(x) = \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Vi vet at konvergensintervallet bevares ved leddvis integrasjon, slik at rekken for $f(x)$ konvergerer (minst) for $-1 < x < 1$. Vi må så sjekke endepunktene. $x = 1$ gir rekken $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, som vi vet divergerer (den harmoniske rekken). $x = -1$ gir rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Dette er en alternerende rekke der leddene i absoluttverdi er monotont avtagende, og de går mot 0. Dermed konvergerer rekken ved alternerende rekke-testen. Konvergensintervallet blir dermed $[-1, 1)$.