

OPPFRIKKNINGSKURSET!

1 - TALL OG REGNING - LF

1 Vi regner først ut

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 11} = \frac{27}{77} \approx 0.3506$$

og

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{16 \cdot 3} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Vi har også at

$$\frac{4}{7} \approx 0.5714,$$

så til sammen har vi at

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11} < \frac{4}{7} < \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{4}.$$

Alternativt kunne vi utvidet brøkene slik at de fikk felles nevner (for eksempel felles nevner $77 \cdot 4 = 308$) eller sett at $27/77$ må være mindre enn $1/2$ fordi $77/2 = 38.5 > 27$ og at $4/7$ må være litt større enn $1/2$, men ikke så veldig mye.

4 a) $(x^{-3})^{-2} = x^{(-3) \cdot (-2)} = x^6$

b) $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3 \log_5(5) = 3$

c) $\log_{1/3} 3^{2x} = 2x \log_{1/3}(3) = -2x$. Merk at $\log_{1/3}(3) = -1$ fordi $(1/3)^{-1} = 3$.

d) $10^{-\log_{10} \frac{1}{x}} = 10^{\log_{10}(x)} = x$.

e) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x)^2 - (e^{-x})^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} = \frac{1}{e^x - e^{-x}}.$

f) $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 3.$

5 a)

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x} &\geq 2 \\ \frac{2x+1}{x} - 2 &\geq 0 \\ \frac{2x+1-2x}{x} &\geq 0 \\ \frac{1}{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Vi vet at $1/x$ aldri vil være lik 0, men $1/x$ vil være større enn null, så lenge x er positiv. Så løsningen er $x \in (0, \infty)$.

b) Ulikheten $-x^2 > \pi$ har ingen løsning. x^2 vil alltid være positiv (eller lik null), og dermed vil $-x^2$ alltid være negativt (eller lik null), og et negativt tall eller null er aldri større enn π .

OPPFRISKNINGSKURSET!

c) Vi bruker at $\ln(e^a) = a$, og får

$$\begin{aligned} e^{x-10} &< 5 \\ \ln(e^{x-10}) &< \ln(5) \\ x - 10 &< \ln(5) \\ x &< 10 + \ln 5. \end{aligned}$$

d) Vi skriver om ulikheten litt vha. tredje kvadratsetning:

$$\begin{aligned} \ln^2(x) &> 1 \\ \ln^2(x) - 1 &> 0 \\ (\ln x - 1)(\ln x + 1) &> 0. \end{aligned}$$

Produktet over er null dersom

$$\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e,$$

eller

$$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}.$$

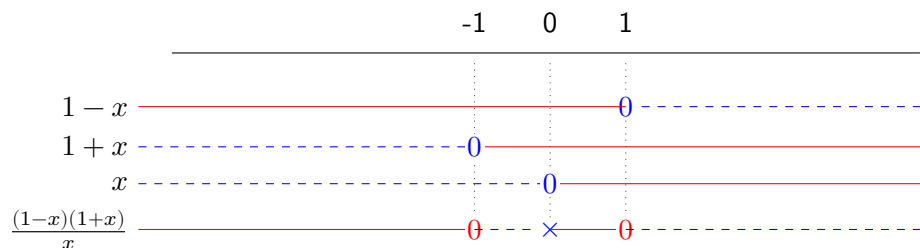
For x -verdier mellom e og $1/e$, vil produktet være negativt (det kan være lurt å for eksempel tegne grafen til $\ln^2(x) - 1$), og for $x > e$ og $x < 1/e$ vil produktet være positivt. I tillegg må vi ha at $x > 0$ for at vi skal kunne ta logaritmen av x i det hele tatt. Løsningen er dermed

$$x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, \infty).$$

e)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &> x \\ \frac{1}{x} - x &> 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &> 0 \\ \frac{(1-x)(1+x)}{x} &> 0 \end{aligned}$$

Vi tegner fortegnsskjema:



Vi ser av fortegnsskjemaet at ulikheten er oppfylt når $x < -1$ og når $0 < x < 1$.

OPPFRISKNINGSKURSET!

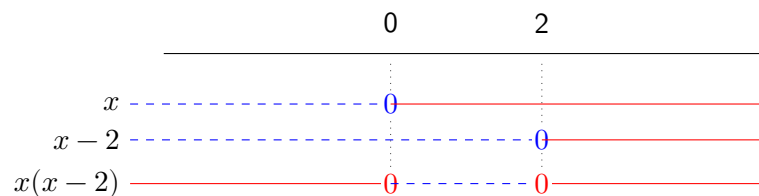
f)

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + 8x} &> 1 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 4} &> 1 \\ \sqrt{(x+2)^2} &> 1 \\ |x+2| &> 1 \\ x+2 &> 1 \text{ eller } x+2 < -1 \\ x &> -1 \text{ eller } x < -3.\end{aligned}$$

g) Vi skriver om litt:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &\leq 0 \\ x(x-2) &\leq 0.\end{aligned}$$

Vi tegner så fortegnsskjema:



Vi ser av fortegnsskjemaet at ulikheten er oppfylt for $0 \leq x \leq 2$.

- h) Vi ser at løsningen er $x \geq 1$ siden 3^x vil være mindre enn 3 dersom x er mindre enn 1, mens 3 opphøyd i et tall større enn 1 vil være større enn 3. Vi har likhet bare når $x = 1$.
- i) Vi vet at $\sin x$ er større enn eller lik null når $0 \leq x \leq \pi$. Husk også at sinusfunksjonen er periodisk med en periode på 2π , så løsningen på ulikheten vil være $2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi$, for $n \in \mathbb{Z}$.
- j) Vi vet at $\tan x$ har en periode på π . Videre har vi at tangensfunksjonen øker fra $-\infty$ til ∞ på intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$, før den hopper ned igjen til $-\infty$. Hvis vi ser på ligningen $\tan x = 1$, får vi $x = \arctan 1 = \pi/4$. Dermed er $\tan x > 1$ for $x \in (\pi/4, \pi/2)$. Siden tangensfunksjonen har en periode på π vil den generelle løsningen da være $\pi/4 + n\pi < x < \pi/2 + n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.
- k) Ulikheten $\cos x > 1$ har ingen løsning, fordi $\cos x$ alltid ligger mellom -1 og 1 .

7

- (i) $\implies$ (ii) fordi hvis Nils Arne bor på Lademoen, så bor han garantert i Trondheim, men han kan bo i Trondheim uten å bo på Lademoen.
- (ii) $\iff$ (iii) fordi Trondheim er nøyaktig den byen der RBK spiller sine hjemmekamper.
- (iii) $\implies$ (iv) fordi hvis Nils Arne bor i byen der RBK spiller sine hjemmekamper, så bor han i Norge fordi RBK spiller sine hjemmekamper i en by i Norge, men det er fullt mulig å bo i Norge uten å bo i byen der RBK spiller sine hjemmekamper.

Merk også at f.eks. (i) $\implies$ (iv) siden (i) medfører (ii) som medfører (iii) som medfører (iv).

OPPFRIKKNINGSKURSET!

- 8
- (i) $\implies$ (ii), fordi hvis $x = 3$ må $x^2 = 9$, men vi kan ha at $x^2 = 9$ uten at $x = 3$.
 - (ii) $\iff$ (iii), fordi hvis $x^2 = 9$ så kan ikke x være noe annet enn 3 eller -3 , og hvis $x = \pm 3$, så vil $x^2 = 9$.
 - (iii) $\iff$ (iv), fordi hvis $x = \pm 3$, så vil absoluttverdien til x garantert være 3, og hvis $|x| = 3$, så kan ikke x være noe annet enn 3 eller -3 .
 - (iv) $\iff$ (v) fordi hvis $x = -3$, så vil $|x| = 3$, men vi kan ha at $|x| = 3$ uten at $x = -3$.

NØTTER

- 6 La n være et heltall. Vi skal vise at

$$n^2 \text{ er et oddetall} \implies n \text{ er et oddetall.}$$

Vi viser den kontrapositive påstanden, nemlig at

$$\begin{aligned} n \text{ er ikke et oddetall} &\implies n^2 \text{ er ikke et oddetall, eller} \\ n \text{ er et partall} &\implies n^2 \text{ er et partall.} \end{aligned}$$

Så anta at n er et partall. Det vil si at $n = 2k$ for en eller annen $k \in \mathbb{Z}$. Da er $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$. Så n^2 har en faktor 2 og er dermed et partall. Da har vi vist at hvis n er et partall, må n^2 være et partall, og dermed har vi også vist at hvis n^2 ikke er et partall, kan heller ikke n være et partall.

- 7 Vi ønsker å vise at $\sqrt{3}$ ikke er et rasjonalt tall. Vi antar det motsatte og ser om det fører til en selvmodsigelse. Så vi antar at $\sqrt{3}$ er et rasjonalt tall. Da finnes det heltall m og n slik at $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$. Videre kan vi anta at m og n ikke har noen felles faktorer. Da vil

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \iff m^2 = 3n^2.$$

Nå har vi to ulike tilfeller vi må se på: (i) n er et partall, og (ii) n er et oddetall.

- Hvis n er et partall, så vil n^2 også være et partall. Videre vil da $3n^2$ være et partall, og dermed er m^2 et partall. Men hvis m^2 er et partall, vil også m være et partall. Men det betyr at både m og n er partall, som vil si at begge har en faktor 2, som går mot antagelsen vår om at m og n ikke har noen felles faktorer.
- Hvis n er et oddetall, vil også n^2 være et oddetall. Videre vil da $3n^2$ være et oddetall, og dermed er m^2 et oddetall. Hvis m^2 er et oddetall, vil også m være et oddetall. Så nå er både m og n oddetall. Det betyr at vi kan skrive $m = 2k + 1$ og $n = 2q + 1$, for $k, q \in \mathbb{Z}$. Da får vi

$$\begin{aligned} m^2 &= 3n^2 \\ (2k + 1)^2 &= 3(2q + 1)^2 \\ 4k^2 + 4k + 1 &= 12q^2 + 12q + 3 \\ 4k^2 + 4k &= 12q^2 + 12q + 2 \\ 2k^2 + 2k &= 6q^2 + 6q + 1 \\ 2(k^2 + k) &= 2(3q^2 + 3q) + 1. \end{aligned}$$

OPPFRISKNINGSKURSET!

Vi legger merke til at venstre side av ligningen er et partall, mens høyre siden er et oddetall. Siden det er en ligning skal de to sidene være like, men det finnes jo ikke noe heltall som er både et partall og et oddetall.

Vi har nå sett at vi får en selvmotsigelse både når n er et partall og når n er et oddetall. Dermed må antagelsen vi gjorde i starten om at $\sqrt{3}$ er et rasjonalt tall være feil. Det betyr at $\sqrt{3}$ ikke er rasjonalt, eller $\sqrt{3}$ er irrasjonalt, om man vil.

- 8 La n være et heltall. Vi ønsker å vise at dersom $n^2 - 6n + 5$ er et partall, så må n være et oddetall. Vi viser den kontrapositive påstanden, nemlig

$$n \text{ er et partall} \implies n^2 - 6n + 5 \text{ er et oddetall.}$$

La n være et partall. Da kan vi skrive $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Da vil

$$\begin{aligned} n^2 - 6n + 5 &= (2k)^2 - 6(2k) + 5 \\ &= 4k^2 - 12k + 5 \\ &= 4k^2 - 12k + 4 + 1 \\ &= 4(k^2 - 3k + 1) + 1. \end{aligned}$$

$4(k^2 - 3k + 1)$ er et partall, så $4(k^2 - 3k + 1) + 1 = n^2 - 6n + 5$ må være et oddetall. Da har vi vist at hvis n er et partall, så er $n^2 - 6n + 5$ et oddetall. Dermed må det også være sant at hvis $n^2 - 6n + 5$ er et oddetall, så må n være et partall.

- 9 Vi ønsker å vise at det ikke finnes noen heltall a, b slik at $a^2 - 4b = 2$. Vi antar det motsatte og ser om det fører til en selvmotsigelse. Vi antar altså at det finnes hele tall a og b , slik at $a^2 - 4b = 2$. Da vil

$$a^2 = 4b + 2 = 2(2b + 1),$$

så a^2 er et partall. Det betyr at a er et partall, så $a = 2k$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Det betyr at vi får

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &= 2 \\ (2k)^2 - 4b &= 2 \\ 4k^2 - 4b &= 2 \\ 2k^2 - 2b &= 1 \\ 2(k^2 - b) &= 1. \end{aligned}$$

Nå vil $(k^2 - b)$ være et heltall, så 1 må være et partall. Men vi vet jo godt at 1 ikke er et partall, så vi har en selvmotsigelse. Det betyr at antagelsen vi gjorde i starten om at det finnes hele tall a og b slik at $a^2 - 4b = 2$ ikke kan være riktig.

- 10 a) Vi skal vise at

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for alle heltall $n \geq 1$. Vi viser først at likheten gjelder for $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6}.$$

Vi viser så at *dersom* likheten gjelder for en vilkårlig $n = k$, så må den også gjelde for $n = k + 1$. Vi antar at

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

OPPFRISKNINGSKURSET!

Dette er *induksjonshypotesen* (IH). Da vil

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 \\
 &\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
 &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \right) \\
 &= (k+1) \left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
 \end{aligned}$$

I likheten merket med (*) har vi brukt at $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$. Denne faktoriseringen kan vi finne f.eks. ved å bruke abc-formelen. Da har vi vist at påstanden holder for $n = 1$, og at *dersom* den holder for en vilkårlig $n = k$, holder den også for $n = k+1$. Siden den da holder for $n = 1$, må den holde for $n = 2$, og da må den holde for $n = 3$, og da må den holde for $n = 4$ osv.

- b)** Vi skal vise at $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle heltall $n \geq 1$. Vi viser først at påstanden gjelder for $n = 1$: $4^1 - 1 = 3$, som definitivt er delelig med 3. Vi viser så at *dersom* påstanden holder for en vilkårlig $n = k$, vil den også holde for $n = k+1$. Så anta at $4^k - 1$ er delelig med 3 for en vilkårlig $k \in \mathbb{N}$. Da vil det finnes et naturlig tall m slik at $4^k - 1 = 3m$, eller med andre ord at $4^k = 3m + 1$. Dette er induksjonshypotesen (IH). For $n = k+1$ får vi da at

$$\begin{aligned}
 4^{k+1} - 1 &= 4 \cdot 4^k - 1 \\
 &\stackrel{\text{IH}}{=} 4(3m + 1) - 1 \\
 &= 12m + 3 \\
 &= 3(4m + 1),
 \end{aligned}$$

som er delelig med 3. Da har vi vist at påstanden holder for $n = 1$, og at *dersom* påstanden holder for en vilkårlig $n = k$, holder den også for $n = k+1$. Da har vi altså vist ved induksjon at $4^n - 1$ er delelig med 3, for alle heltall $n \geq 1$.