OPPFRISKNINGSKURSET!

1 - TALL OG REGNING

I denne øvingen skal vi begynne med noen gode gammeldagse regneoppgaver.

$\boxed{1}$ Sorter tallene $3/4$, $4/7$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11}$ og $\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3}$ i stigende rekkefølge.

$\boxed{2}$ Finn primtallsfaktoriseringene til 132, 198, 42 og 858, og regn ut

$$\frac{198}{132} + \frac{858}{156}.$$

$\boxed{3}$ Løs likningene:

a) $\frac{x+2}{3x-1} = \frac{3}{2}$

b) $|x| = x - 1$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$

d) $8x^3 + 8x^2 - 2x - 2 = 0$

e) $8x^6 + 8x^4 - 2x^2 - 2 = 0$

f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots = 1$

f) $\sin(\theta - \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{4}$ Forenkle uttrykkene:

a) $(x^{-3})^{-2}$

b) $\log_5 125$

c) $\log_{1/3} 3^{2x}$

d) $10^{-\log_{10} \frac{1}{x}}$

e) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$

f) $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

g) $\sqrt{27}$

h) $\sqrt[4]{64}$

$\boxed{5}$ Løs ulikhetene:

a) $\frac{2x+1}{x} \geq 2$

b) $-x^2 > \pi$

c) $e^{(x-10)} < 5$

d) $\ln^2(x) > 1$

e) $\frac{1}{x} > x$

f) $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} > 1$

g) $x^2 - 2x \leq 0$

h) $3^x \geq 3$

i) $\sin x \geq 0$

j) $\tan x > 1$

k) $\cos x > 1$

l) $|3x - 10| < 5$

m) $\frac{2x+1}{x} \geq 2$

$\boxed{6}$ Bestem hvilke av følgende uttrykk som er *ekvivalente*.

- $x \in [2, 5]$
- $x \in (-\infty, 10)$
- $x \in (2, 7]$
- $x < 10$
- $x \in [2, 4] \cup (4, 5]$
- $x \leq 10$
- $2 < x \leq 7$
- $2 < x < 5$
- $x \in [2, 4) \cup (3, 5]$
- $x \in (-\infty, 5) \cap (2, \infty)$

Hint: det er fire par. Det kan være lurt å skissere uttrykkene på tallinja.

Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn:

$\boxed{7}$ (i) Nils Arne bor på Lademoen.

(ii) Nils Arne bor i Trondheim.

(iii) Nils Arne bor i byen der RBK spiller sine hjemmekamper.

(iv) Nils Arne bor i Norge.

$\boxed{8}$ $x = 3$ $\quad x^2 = 9$ $\quad x = \pm 3$ $\quad |x| = 3$ $\quad x = -3$

$\boxed{9}$ Vis at likningen

$$x^2 + bx + c = 0$$

har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

dersom $b^2 - 4c \geq 0$.

Hint: trikset her er å fullføre kvadratet, og bruke at

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}.$$

$\boxed{10}$ Bruk forrige oppgave til å vise at likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dersom $b^2 - 4ac \geq 0$ og $a \neq 0$.

$\boxed{11}$ Vis at

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

der x og y er positive reelle tall.

NØTTER

$\boxed{1}$ Vis at dersom $n > 1$ og $x \neq 1$, er

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

$\boxed{2}$ Vis at dersom $|x| \leq 1$, er

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

$\boxed{3}$ Anta at en sprettball som slippes rett ned, spretter opp 3/4 av den opprinnelige høyden den ble sluppet fra. Anta at ballen kun beveger seg i vertikal retning. Hva er avstanden ballen vil bevege seg før den blir liggende stille når den slippes fra en høyde på 3 meter?

$\boxed{4}$ Det er mulig å skrive

$$1729 = x^3 + y^3$$

på to forskjellige måter. Finn dem.

$\boxed{5}$ Gang ut $(a + b)^6$.

$\boxed{6}$ La n være et heltall. Vis at dersom n^2 er et oddetall, så må n være et oddetall (hint: kontrapositivt bevis).

$\boxed{7}$ Vis at $\sqrt{3}$ ikke er et rasjonalt tall (hint: motsigelsesbevis).

$\boxed{8}$ La n være et heltall. Vis at dersom $n^2 - 6n + 5$ er et partall, så må n være et oddetall (hint: kontrapositivt bevis).

$\boxed{9}$ Vis at det ikke finnes noen heltall a, b slik at $a^2 - 4b = 2$ (hint: motsigelsesbevis).

$\boxed{10}$ Bevis følgende utsagn ved induksjon.

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for alle heltall $n \geq 1$.

b) $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle heltall $n \geq 1$.