

2 - GEOMETRI OG TRIGONOMETRI - LF

- 1 En sirkel med radius r og sentrum i punktet (x_0, y_0) har ligning $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Sentrum av sirkelen vår ligger i $(2, 0)$ og den har radius 3. Ligningen for sirkelen er dermed $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.
- 2 Vi bruker radianer i stedet for grader, og har at $60^\circ = \pi/3$ radianer. Delen av pannekaka som ligger i første kvadrant kan deles i tre deler: området D som vi er interessert i, den rettvinklede trekanten som har hypotenus med lengde r , og resten av det som ligger i første kvadrant, som er en sirkelsektor. Den delen av pannekaka som ligger i første kvadrant har areal $A_1 = \frac{\pi r^2}{4}$. Trekanten har grunnlinje $r \cos(\pi/3)$ og høyde $r \sin(\pi/3)$. Arealet av trekanten er dermed

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cos(\pi/3) \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{8} r^2.$$

Sirkelsektoren som står igjen har areal

$$A_{\text{sektor}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} r^2.$$

Området D har dermed areal

$$A_D = A_1 - A_{\triangle} - A_{\text{sektor}} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) r^2.$$

Hele pannekaka har areal $A_{\text{tot}} = \pi r^2$, så Landstrykeren får

$$\frac{A_D}{A_{\text{tot}}} = \frac{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) r^2}{\pi r^2} \approx 9.78\%$$

av pannekaka.

- 3 La oss hjelpe Aladdin ved å utlede en generell formel for arealet av en trekant når vi vet alle sidelengdene. Vi tegner først en figur:
Her har vi en trekant med sidelengder a, b og c og høyde h . Vi kaller vinkelen mellom sidene a og b for θ . Legg først merke til at

$$\sin \theta = \frac{h}{b} \iff h = b \sin \theta.$$

Det betyr at arealet kan skrives som

$$A = \frac{1}{2} (\text{grunnlinje}) \cdot (\text{høyde}) = \frac{1}{2} ab \sin \theta.$$

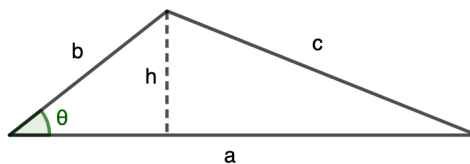
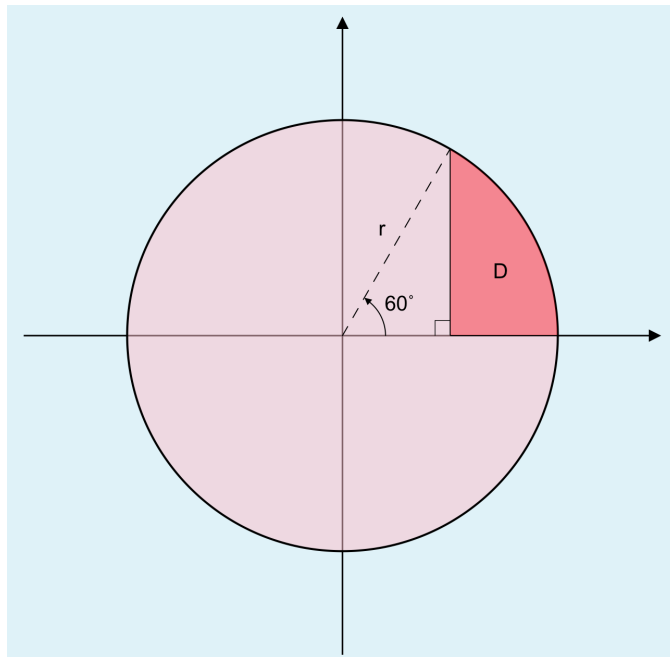
Videre gir cosinussetningen oss at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta, \text{ eller } \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vi har vi en fin trigonometrisk identitet som sier at

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

OPPFRISKNINGSKURSET!



som gir oss at

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}.$$

Setter vi inn uttrykket for $\cos \theta$ vi har over, får vi at

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}.$$

Det betyr at arealet av trekanten kan skrives som

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \theta = \frac{1}{2}ab \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}.$$

Nå kan vi egentlig plugge inn for eksempel $a = 7$, $b = 3$ og $c = 5$ og få at $A \approx 6.4952$, men hvis vi passer på å holde tunga rett i munnen og bruker kvadratsetningene kan vi gjøre

OPPFRIKKNINGSKURSET!

formelen litt penere:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2}ab \sin \theta = \frac{1}{2}ab \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))} \\
 &= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))((a^2 + 2ab + b^2) - c^2)} \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sqrt{\frac{(c - (a - b))(c + (a - b))((a + b) - c)((a + b) + c)}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}} \\
 &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},
 \end{aligned}$$

der

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

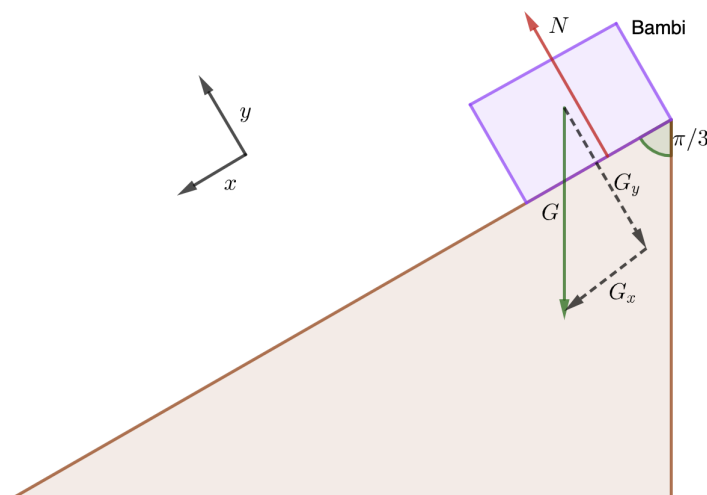
I likhetene merket med (*) har vi brukt tredje kvadratsetning (konjugatsetningen) og i likheten merket med (**) har vi brukt første og andre kvadratsetning. Formelen

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \text{ med } s = \frac{a + b + c}{2}$$

og der a, b og c er sidelengdene i en trekant, kalles *Hérons formel* og er oppkalt etter Heron fra Alexandria. Med sidelengdene 3, 5 og 7 som gitt i oppgaven, får vi $s = 15/2$ og

$$A = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 7 \right) \left(\frac{15}{2} - 3 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right)} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \approx 6.4952.$$

- 4 Vi starter med å tegne en figur. For enkelhets skyld antar vi for anledningen at Bambi er en firkantet kloss, som sklir nedover skråplanet. Kreftene som virker på Bambi er normalkraften



N fra underlaget, og tyngdekraften $G = mg$, der m er massen til Bambi og g er tyngdeakselerasjonen, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Tyngdekraften har en komponent G_y vinkelrett på skråplanet og en

OPPFRISKNINGSKURSET!

komponent G_x parallelt med skråplanet. Newtons andre lov sier at summen av kreftene som virker på klossen er lik massen til klossen ganget med akselerasjonen, eller

$$\Sigma F = ma.$$

Vi er ute etter akselerasjonen nedover skråplanet, som vi har definert som positiv x -retning. Siden det er null friksjon, er G_x den eneste kraften som virker i denne retningen. Det betyr at i x -retning har vi

$$\Sigma F = G_x,$$

og dermed

$$G_x = ma.$$

Merk at når vi dekomponerer tyngdekraften får vi en ny liten rettvinklet trekant, der vi finner igjen vinkelen $\pi/3$ mellom G og G_x . Da får vi at

$$\cos(\pi/3) = \frac{G_x}{G} \iff G_x = G \cos(\pi/3) = mg \cos(\pi/3).$$

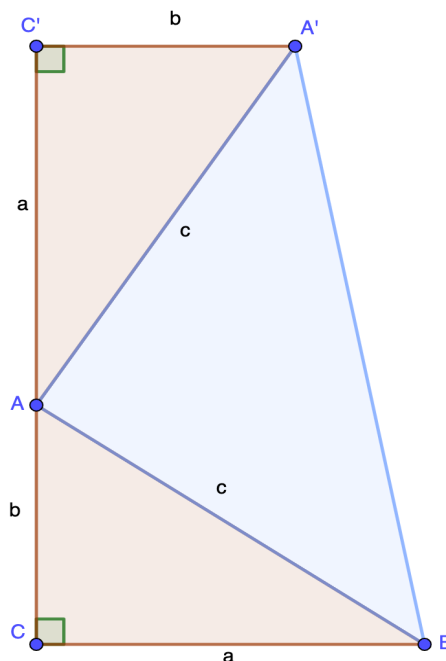
Det betyr at

$$ma = mg \cos(\pi/3)$$

eller

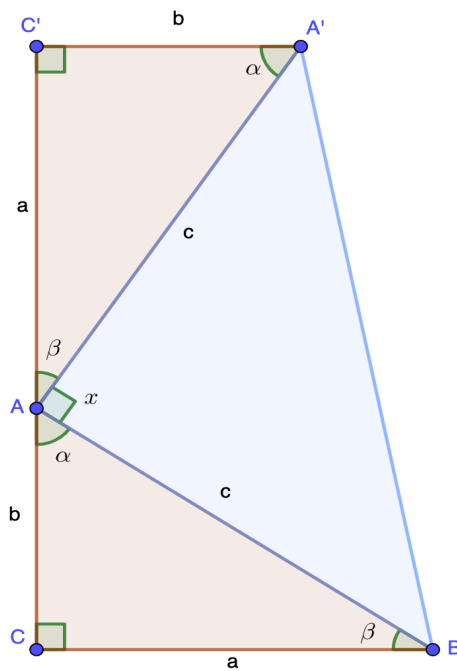
$$a = g \cos(\pi/3) = 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos(\pi/3) = 4.91 \text{ m/s}^2.$$

- 7 Vi vil bevise dette resultatet på samme måte som daværende kongressmedlem, og senere president i USA, James A. Garfield gjorde i 1876. Garfield kopierte trekanten og roterte og flyttet litt på den og endte opp med følgende trapes, der linjestykket AC' er en forlengelse av CA :



- a) Vi ønsker først å vise at den nye trekanten som dukket opp er rettvinklet. La $\angle A'AB = x$. Vi legger først merke til at trekantene $\triangle CBA$ og $\triangle C'AA'$ er *kongruente*, siden den andre er lik den første bare rotert og flyttet litt. Spesielt finner vi da de samme vinklene i de to trekantene. Vi navngir vinklene som på figuren under.

OPPFRIKKNINGSKURSET!



Siden trekantene er rettvinklede, vil $\alpha + \beta = 90^\circ$. Siden AC' er en forlengelse av CA , er linjestykket CC' et rett linjestykke. Dermed må $\alpha + \beta + x = 180^\circ$. Det følger da at $x = 90^\circ$.

- b)** Arealet av trapeset kan skrives på to måter, enten ved å bruke arealformelen for et trapes, eller ved som summen av arealene til de tre trekantene. Arealet til et trapes der de parallelle sidene har lengder a og b , og høyden har lengde h , er gitt ved

$$A = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Vårt trapes har høyde $(a+b)$, så arealet er gitt ved

$$A = \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Vi kan også uttrykke arealet som summen av arealene til tre trekantar. De to trekantene $\triangle CBA$ og $\triangle C'AA'$ har begge areal

$$A_{\triangle CBA} = \frac{1}{2}ab.$$

Siden $\triangle A'AB$ er rettvinklet har den areal

$$A_{\triangle ABA'} = \frac{1}{2}c^2.$$

Dermed er arealet av trapeset gitt ved

$$A = 2 \cdot A_{\triangle CBA} + A_{\triangle ABA'} = ab + \frac{1}{2}c^2.$$

OPPFRISKNINGSKURSET!

- c) De to uttrykkene vi fant i oppgave b) er to uttrykk for det samme arealet, så de må være like. Det gir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b)^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2 \\ \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2,\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise.