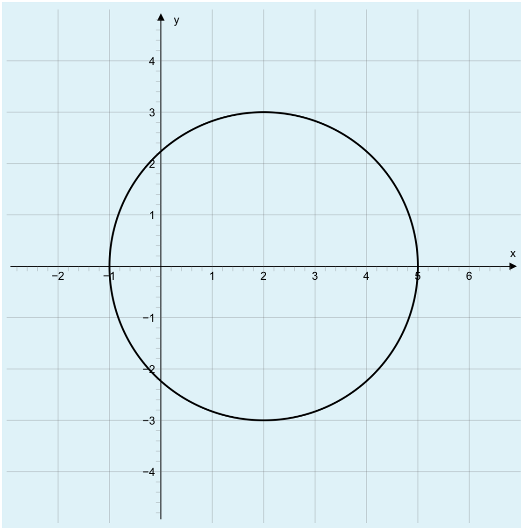
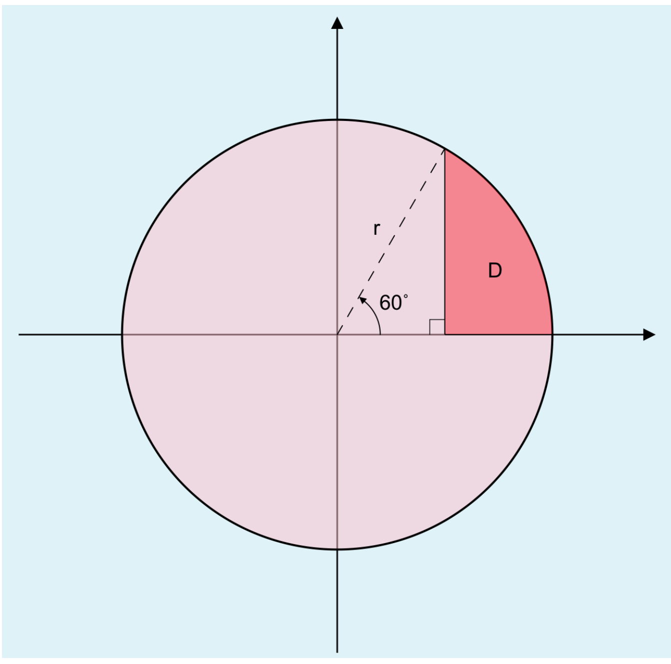
OPPFRISKNINGSKURSET!

2 - GEOMETRI OG TRIGONOMETRI

$\boxed{1}$ Finn en likning for sirkelen i figuren under.



$\boxed{2}$ Lady snakker daglig med sin venn Landstrykeren på FaceTime, Zoom, Teams eller Skype (de liker å variere litt). En dag får Landstrykeren øye på en pannekake på kjøkkenet til Lady mens de snakker sammen, og han spør om de kan dele den. Bunnen til pannekaken er formet som en disk med radius r, og pannekaken er like tykk/tynn overalt. Figuren viser pannekaken sett ovenfra. Lady har egentlig lyst til å spise hele pannekaken selv, men velger å sende den delen av pannekaken som har fått navnet D til Landstrykeren. Hvor stor andel av pannekaken får Landstrykeren tilsendt?



3 Aladdin har en trekant med sider på 3, 5 og 7 cm. Hans innerste ønske er å få vite hva arealet til trekanten er, og når ånden i lampen gir ham tre ønsker, bruker han ett av dem på dette. Han vet nemlig ikke at man bare kan regne det ut. Hva er arealet?

4 Tyngdekraften drar dåhjorten Bambi nedover et skrått, isbelagt underlag. Underlaget er såpeglatt og helt friksjonsfritt, og danner vinkelen $\pi/3$ med loddlinjen. Hva er Bambis akselerasjon?

5 Bruk enhetssirkelen til å vise at

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \qquad \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \qquad \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

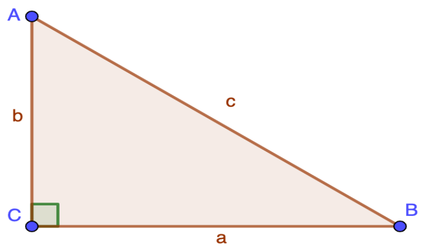
6 Kryssproduktet mellom to vektorer i $\mathbb{R}^3$ er definert ved

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

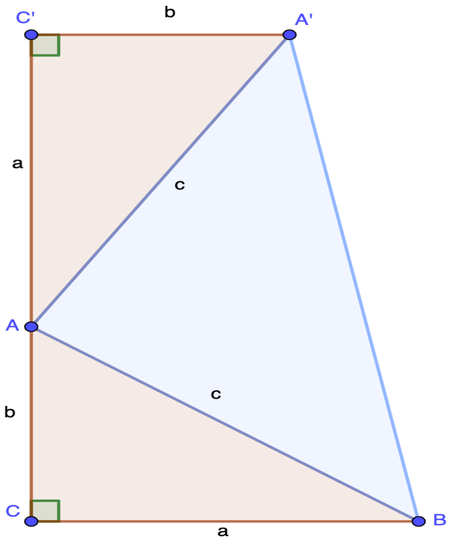
Vis at kryssproduktet står normalt på både $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

7 I denne oppgaven skal vi gi et bevis for den pytagoreiske læresetning, som sier at for følgende rettvinklede trekant, så er summen av kvadratene av katetenes lengder lik kvadratet av hypotenusens lengde, det vil si:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Vi vil bevise dette resultatet på samme måte som daværende kongressmedlem, og senere president i USA, James A. Garfield gjorde i 1876. Garfield kopierte trekanten og roterte og flyttet litt på den og endte opp med følgende trapes, der linjestykket AC' er en forlengelse av CA.



a) Her har det dukket opp en ny trekant, $\triangle ABA'$. Vis at denne trekanten er rettvinklet (hint: den rette vinkelen er $\angle A'AB$).

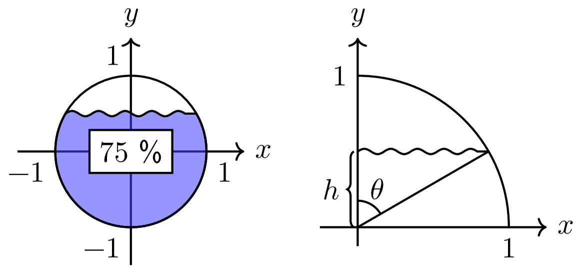
b) Uttrykk arealet av trapeset på to ulike måter (hint: arealformel for trapes og areal av trekanter).

c) Bruk resultatet fra oppgave **b)** til å vise at $a^2 + b^2 = c^2$ (hint: hva er sammenhengen mellom de to uttrykkene du fant i oppgave **b)**?).

NØTTER

$\boxed{1}$ Vis at når vannet fyller 75 % av rørets tverrsnitt, løser θ ligningen

$$2\sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0.$$



(Figur: Marius Thaule.)

$\boxed{2}$ Bruk enhetssirkelen til å vise at

$$\cos(\alpha \mp \theta) = \cos\alpha\cos\theta \pm \sin\alpha\sin\theta$$

Nå kan man relativt enkelt utlede de andre formlene for sinus og cosinus, for eksempel

$$\sin(\alpha \pm \theta) = \sin\alpha\cos\theta \pm \sin\theta\cos\alpha$$

og

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

osv. Gjør det!

$\boxed{3}$ Utled cosinussetningen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

(Hint: La a-siden være radien i en sirkel sentrert i origo, og la b -siden ligge langs x-aksen.)

$\boxed{4}$ Vis geometrisk at

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

$\boxed{5}$ Hva med

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}?$$

$\boxed{6}$ La $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ og $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og la θ være vinkelen mellom dem. Det finnes to forskjellige måter å beregne skalarproduktet mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, nemlig

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2$$

og

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \|v\|\|w\|\cos\theta.$$

Vis at disse gir samme resultat. (Hint: tegn opp $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ og bruk cosinussetningen.)

$\boxed{7}$ Vis at $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|\sin\theta$, der θ er vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.