# 4 - INTEGRALET

Viggo Brun skal ha sagt:

> Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens antiderivasjon kan være ganske vanskelig. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett eller vanskelig eller håpløst eller umulig å antiderivere, og det kan være det ikke går an å avgjøre på forhånd hvilken av disse som er tilfellet før man har prøvd å antiderivere. Kanskje er det til og med lett, men man kan ikke akkurat det trikset som trengs, og derfor går det ikke.

Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon. Hvis man vil lage en integrasjonsoppgave på eksamen som ingen får til, er det bare å gi

$$\int \frac{\log\cos x}{\sin 2x}\,dx$$

som blir

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\,dx = \\
&-\Bigg(\Bigg(\log(\cos(x))\left(2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg)\Bigg) \Big/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \text{constant}
\end{aligned}$$

OPPFRISKNINGSKURSET!

Men det er nå greit å kjenne til de vanligste antiderivasjonsreglene. La oss begynne med å repetere noen triks. Først noen arealklassikere som Arkimedes fant ut av allerede 250 BC. Finn arealet avgrenset av

$\boxed{1}$ $y = x$, $y = 0$ og $x = 1$

$\boxed{2}$ $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$

$\boxed{3}$ $y = x^2$, $y = 1$ og $x = 0$

Andre klassikere er de der man bare må skrive om integranden litt.

$\boxed{4}$ Regn ut

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4}\, dx$$

(Hint: faktoriser polynomet.)

$\boxed{5}$ Regn ut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\, dx$$

( Hint: $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$.)

$\boxed{6}$ Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse.

Et annet klassisk triks, er kjerneregelen. Dette er bare kjerneregelen for derivasjon i retur. Siden

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$

er det veldig lett å beregne

$$\int -2xe^{-x^2}\ dx = e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden ser omtrent riktig ut i forhold til dette systemet, men har feil konstant, er det bare å gange og dele og herje litt:

$$\int 3xe^{-x^2}\ dx = 3\int xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}\int -2xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden blir komplisert, kan det være lurt å utføre dette trikset som en variabelsubstitusjon, men dette blir fort en uforståelig oppskrift (det var det ihvertfall for meg da jeg gikk på skolen) om man ikke skjønner at det er kjerneregelen som ligger i bånn for alt:

$$\int 3xe^{-x^2}\ dx = -\frac{3}{2}\int e^u\ du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

$\boxed{7}$ Regn ut

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx.$$

$\boxed{8}$ Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2+16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

$\boxed{9}$ Beregn

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\ dx.$$

Du husker kanskje formelen for delvis integrasjon:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Finn

$\boxed{10}$ $\int x\cos x\ dx$.

$\boxed{11}$ $\int e^x \cos x\ dx$.

# NØTTER

$\boxed{0}$ Finn ut hvordan du skriver og kjører pythonkode på laptopen din.

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen $e^{-x^2}$ har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en pen måte.

$\boxed{1}$ Arealet under grafen til $f(x) = e^{-x^2}$ og mellom $x = 0$ og $x = 1$ skrives

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0.7468241328...$$

Finn dette arealet på en eller annen måte uten wolframalpha.

Det viktigste å skjønne når vi skal forstå integrasjon, er hva en riemannsum er. Disse brukes egentlig til å definere integralet, men kan også brukes til å finne en tilnærming til arealet under grafen.

$\boxed{2}$ Gå på nett og finn ut hva en riemannsum er, og finn

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

ved hjelp av riemannsummer.

Hvorfor plages vi med dette? Standardnormalfordelingen

`https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution`

har sannsynlighetstetthetsfunksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Denne skal du bli godt kjent med senere i studiet. Nå tar vi en liten forsmak.

I en kontinuerlig sannsynlighetsmodell finner man sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function`

Sannsynligheten for at en standardnormalfordelt stokastisk variabel $Z$ havner mellom $a$ og $b$ i et forsøk, er

$$P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Du kan lese mer om normalfordelingen i kap. 24.8 i Kreyszig eller i kap. 7.8 i Adams. I standardnormalfordelingen er $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

$\boxed{3}$ Du vet at standardnormalfordelingsfunksjonen ikke har noen antiderivert som er lett å evaluere. Lag en pythonfunksjon som tar inn $a$ og $b$ og returnerer $P(a < Z < b)$ ved riemannsummer.

Hvis du lykkes med denne oppgaven, har du din egen rutine for å beregne sannsynligheter i standardnormalfordelingen. Du kan bruke den senere i studiet.