Løsningsforslag til forprøve

$\boxed{1}$ Vi ser umiddelbart at 3 er felles faktor i teller, og kanselleres mot 3 i nevner:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7 \cdot 3 + 3 \cdot 5}{2} = 5 \cdot \frac{7+5}{2} = 5 \cdot \frac{12}{2} = 5 \cdot 6 = 30.$$

$\boxed{2}$ Siden man kun kan ta kvadratrøtter av positive tall (stemmer det?), bør vi merke oss at

$$(x-1)^2 + 4x = x^2 - 2x + 1 + 4x = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0,$$

og vi kan trygt beregne at

$$\sqrt{(x-1)^2 + 4x} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|.$$

$\boxed{3}$ Potensregler gir at

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = a^1 = a.$$

$\boxed{4}$ Funksjonen gitt ved $f(x) = 2^{-x}$ er en eksponensialfunksjon. Dette er en sentral type funksjon, som vil bli behandlet grundig i TMA4100 Matematikk 1. Siden f er monotont synkende overalt, kan den krysse den vannrette linjen $y = 1$ maksimalt en gang, og siden likningen $2^{-x} = 1$ åpenbart er oppfylt for $x = 0$, kan vi konkludere at det finnes nøyaktig én løsning.

$\boxed{5}$ Hvis vi legger sammen likningene, får vi likningen $8x = 32$, som gir at $x = 4$, og innsetting av dette i en av de originale likningene gir $y = -1$. Denne teknikken kalles gausseliminasjon, og undervises i TMA4110/4115 Matematikk 3.

$\boxed{6}$ Tallene 3, 4 og 5 kalles et pytagoreisk trippel, siden

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

og alle snekkere vet at om de trenger en rett vinkel, kan de sage opp tre lekter med lengder 3, 4 og 5, og sette dem sammen til en rettvinklet trekant. Siden den rette vinkelen er mellom de to korteste sidene, må sinus til denne vinkelen være 1.

$\boxed{7}$ Tallene 4, 5 og 6 er ikke et pytagoreisk trippel, og vi må ta i bruk cosinussetningen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

som er en generalisering av Pytagoras' lov for rettvinklede trekanter. Vi skriver om, setter inn, og beregner:

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

$\boxed{8}$ Vi begynner med å gange hele ulikheten med 3:

$$-x \geq 9x + 30$$

legge til x på begge sider:

$$0 \geq 10x + 30$$

trekke fra 30 på begge sider:

$$-30 \geq 10x$$

og dele på 10:

$$-3 \geq x$$

$\boxed{9}$ Ulikheten $|5 - 2/x| < 3$ er oppfylt hvis og bare hvis

$$-3 < 5 - 2/x < 3.$$

La oss begynne med å rydde litt. Vi trekker fra 5 på begge sider:

$$-8 < -2/x < -2$$

og ganger alt med -1:

$$8 > 2/x > 2$$

Nå har vi flaks. Ulikhetene impliserer at $x > 0$, og vi kan derfor trygt invertere alt, og få

$$\frac{1}{8} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$$

eller

$$\frac{1}{4} < x < 1.$$

$\boxed{10}$ Idag er verdien av maleriet 50 kr. Om fem år er det verdt $2 \cdot 50$ kr, om ti år $2 \cdot 2 \cdot 50 = 2^2 \cdot 50$ kr, og om femten år $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2^3 \cdot 50$ kr. Siden $70/5 = 14$, er verdien om 70 år $2^{14} \cdot 50$ kr.

$\boxed{11}$ Vi bruker andregradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Riktig svar blir altså $2 \cdot 3 = 6$.

$\boxed{12}$ Et andregradspolynom kan alltid faktoriseres

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

der x_1 og x_2 (disse kalles røtter) er gitt av andregradsformelen. Røttene kan være sammenfallende eller komplekse (dette undervises i Matematikk 3). Siden grafen skjærer x-aksen i 1 og -3, ser vi at polynomet må være på formen

$$p(x) = a(x - 1)(x + 3) = a(x^2 + 2x - 3).$$

Hvis vi tolker av den noe upresise figuren at $p(0) = 6$, ser vi at $a = -2$, og

$$p(x) = -2x^2 - 4x + 6.$$

$\boxed{13}$ Dersom y er temperaturen i Fahrenheit og x den korresponderende temperaturen i Celsius, vet vi at

$$y = ax + b,$$

siden formelen skal være en rett linje. Hilde husker at

$$32 = a \cdot 0 + b,$$

og at

$$212 = a \cdot 100 + 32,$$

slik at $a = \frac{9}{5}$. Vi har altså at

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

Hildes temperatur er $y = 103$, så vi kan beregne temperaturen ved å løse likningen

$$103 = \frac{9}{5}x + 32,$$

som gir $x = 71 \cdot \frac{5}{9} \approx 39.4$.

$\boxed{14}$ Vi setter $t = \frac{v - v_0}{a}$ inn i uttrykket for s:

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{1}{2a}(-2v_0^2 + v^2 + v_0^2) = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2).$$

$\boxed{15}$ Først ser vi at $4 \ln 8^3 = \ln 8^{12}$. Siden $\ln 8^{12} = \ln x^6$, må

$$8^{12} = x^6$$

slik at $x = 8^2 = 64$.

$\boxed{16}$ Donald har gjort den beste feilen i steget der han deler ut $(a - b)$. Siden $a - b = 0$, er likningen

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

sann uansett hva a og b er, og den impliserer derfor ikke at

$$a + b = b.$$