Øving - Tall og regning LF

$\boxed{1}$ Sorter tallene $3/4$, $4/7$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11}$ og $\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3}$ i stigende rekkefølge.
Vi regner først ut

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 11} = \frac{27}{77} \approx 0.3506$$

og

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{16 \cdot 3} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Vi har også at

$$\frac{4}{7} \approx 0.5714,$$

så til sammen har vi at

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11} < \frac{4}{7} < \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{4}.$$

Alternativt kunne vi utvidet brøkene slik at de fikk felles nevner (for eksempel felles nevner $77 \cdot 4 = 308$) eller sett at $27/77$ må være mindre enn $1/2$ fordi $77/2 = 38.5 > 27$ og at $4/7$ må være litt større enn $1/2$, men ikke så veldig mye.

$\boxed{2}$ De siste dagene har Lisa sett at temperaturen i vannet stiger jevnt med 0.4 grader for hver dag. På søndag er det 16.5 grader i vannet, men siden hun ikke liker kulde vil ikke Lisa bade før det er minst 19 grader. På hvilken dag kan Lisa først ta seg et bad?

Vi lar y være temperaturen i vannet etter x dager regnet fra søndag. Da kan temperaturen uttrykkes ved

$$y = 0.4x + 16.5.$$

Lisa vil ha en temperatur på 19 grader, så vi setter $y = 19$ og løser for x:

$$\begin{aligned} 19 &= 0.4x + 16.5 \\ 0.4x &= 2.5 \\ x &= 6.25. \end{aligned}$$

Det betyr at det tar mer enn 6 dager før temperaturen er på et behagelig nivå. Med andre ord kan Lisa bade når det har gått 7 dager, altså fra og med søndagen etter.

$\boxed{3}$ Løs ulikhetene.

a)

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x} &\geq 2 \\ \frac{2x+1}{x} - 2 &\geq 0 \\ \frac{2x+1-2x}{x} &\geq 0 \\ \frac{1}{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Vi vet at $1/x$ aldri vil være lik 0, men $1/x$ vil være større enn null, så lenge x er positiv. Så løsningen er $x \in (0, \infty)$.

b) Ulikheten $-x^2 > \pi$ har ingen løsning. x^2 vil alltid være positiv (eller lik null), og dermed vil $-x^2$ alltid være negativt (eller lik null), og et negativt tall eller null er aldri større enn π.

c) Vi bruker at $\ln(e^a) = a$, og får

$$\begin{aligned} e^{x-10} &< 5 \\ \ln(e^{x-10}) &< \ln(5) \\ x - 10 &< \ln(5) \\ x &< 10 + \ln 5. \end{aligned}$$

d) Vi skriver om ulikheten litt vha. tredje kvadratsetning:

$$\begin{aligned} \ln^2(x) &> 1 \\ \ln^2(x) - 1 &> 0 \\ (\ln x - 1)(\ln x + 1) &> 0. \end{aligned}$$

Produktet over er null dersom

$$\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e,$$

eller

$$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}.$$

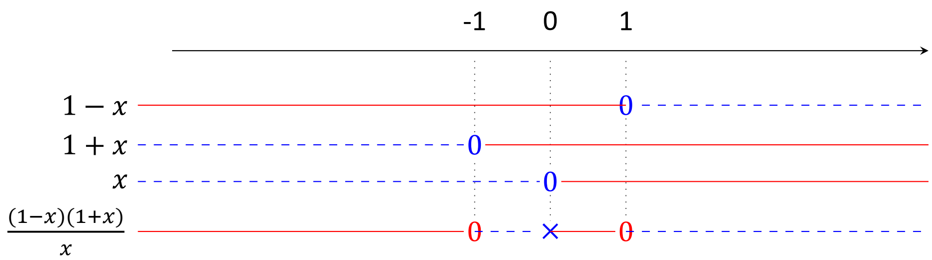
For x-verdier mellom e og $1/e$, vil produktet være negativt (det kan være lurt å for eksempel tegne grafen til $\ln^2(x) - 1$), og for $x > e$ og $x < 1/e$ vil produktet være positivt. I tillegg må vi ha at $x > 0$ for at vi skal kunne ta logaritmen av x i det hele tatt. Løsningen er dermed

$$x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, \infty).$$

e)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &> x \\ \frac{1}{x} - x &> 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &> 0 \\ \frac{(1-x)(1+x)}{x} &> 0 \end{aligned}$$

Vi tegner fortegnsskjema:



Vi ser av fortegnsskjemaet at ulikheten er oppfylt når $x < -1$ og når $0 < x < 1$.

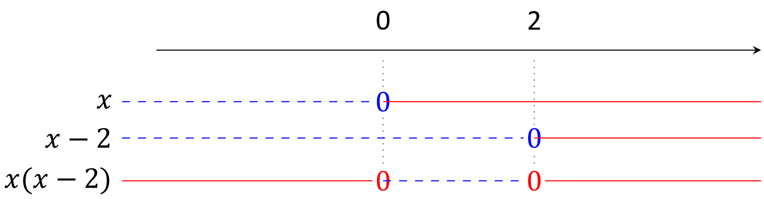
f)

$$\sqrt{(x-2)^2+8x} > 1$$
$$\sqrt{x^2+4x+4} > 1$$
$$\sqrt{(x+2)^2} > 1$$
$$|x+2| > 1$$
$$x+2 > 1 \text{ eller } x+2 < -1$$
$$x > -1 \text{ eller } x < -3.$$

g) Vi skriver om litt:

$$x^2 - 2x \leq 0$$
$$x(x-2) \leq 0.$$

Vi tegner så fortegnsskjema:



Vi ser av fortegnsskjemaet at ulikheten er oppfylt for $0 \leq x \leq 2$.

h) Vi skriver om litt og samler alt i én brøk:

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$$
$$\frac{x}{2} - \frac{4}{x} - 1 \geq 0$$
$$\frac{x^2-2x-8}{2x} \geq 0.$$

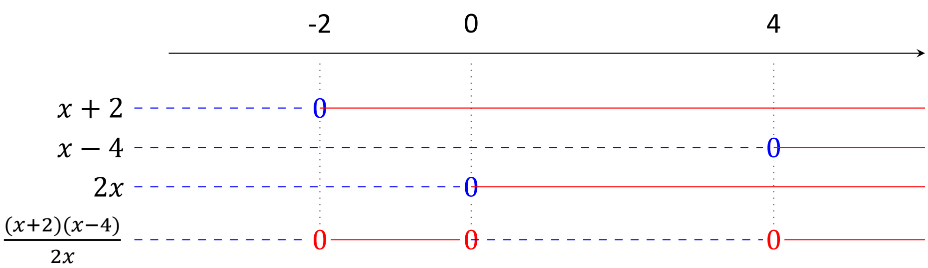
Så faktoriserer vi telleren (for eksempel ved hjelp av abc-formelen) og får at

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2).$$

Vi ender dermed opp med ulikheten

$$\frac{(x+2)(x-4)}{2x} \geq 0.$$

Vi løser denne ved å tegne fortegnsskjema:



Vi ser av fortegnsskjemaet at ulikheten er oppfylt når $-2 \leq x < 0$ eller $x \geq 4$. Merk at x må være ekte mindre enn 0, ellers risikerer vi å få 0 i nevner og det er farlig.

i) Vi ser at løsningen er $x \geq 1$ siden 3^x vil være mindre enn 3 dersom x er mindre enn 1, mens 3 opphøyd i et tall større enn 1 vil være større enn 3. Vi har likhet bare når $x = 1$.

j) Vi vet at $\sin x$ er større enn eller lik null når $0 \leq x \leq \pi$. Husk også at sinusfunksjonen er periodisk med en periode på 2π, så løsningen på ulikheten vil være $2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi$, for $n \in \mathbb{Z}$.

k) Vi vet at $\tan x$ har en periode på π. Videre har vi at tangens-funksjonen øker fra $-\infty$ til ∞ på intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$, før den hopper ned igjen til $-\infty$. Hvis vi ser på ligningen $\tan x = 1$, får vi $x = \arctan 1 = \pi/4$. Dermed er $\tan x > 1$ for $x \in (\pi/4, \pi/2)$. Siden tangensfunksjonen har en periode på π vil den generelle løsningen da være $\pi/4 + n\pi < x < \pi/2 + n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

l) Ulikheten $\cos x > 1$ har ingen løsning, fordi $\cos x$ alltid ligger mellom -1 og 1.

4 Forenkle uttrykkene så mye som mulig.

a) $(x^{-3})^{-2} = x^{(-3)\cdot(-2)} = x^6$

b) $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3\log_5(5) = 3$

c) $\log_{1/3} 3^{2x} = 2x \log_{1/3}(3) = -2x$. Merk at $\log_{1/3}(3) = -1$ fordi $(1/3)^{-1} = 3$.

d) $10^{-\log_{10}\frac{1}{x}} = 10^{\log_{10}(x)} = x$.

e) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}} = \frac{e^x+e^{-x}}{(e^x)^2-(e^{-x})^2} = \frac{e^x+e^{-x}}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})} = \frac{1}{e^x-e^{-x}}$.

f) $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 3.$

5 Fornuftige Jonas har bestemt seg for å avsette alle konfirmasjonspengene sine til pensjonssparing. Han har en drøm om å bli millionær på pensjonspengene sine, og leve et liv i sus og dus på Granca. Hvis vi antar at Jonas vil få 6% rente på pensjonsfondet sitt, hvor mye må han minst klare å skrape sammen til konfirmasjonen sin for at pengene skal vokse over 1 000 000 kr innen han pensjonerer seg som 70-åring?

Vi går ut fra at Jonas konfirmerer seg når han er 15 år. Dermed tar det 55 år fra konfirmasjonen, til han skal pensjonere seg. Hvis Jonas setter inn x kroner det året han konfirmerer seg, vil han ha $x \cdot 1.06$ kroner året etter. Året etter der igjen vil han ha $x \cdot 1.06 \cdot 1.06 = x \cdot 1.06^2$ kroner. Tilsvarende vil beløpet etter 55 år ha økt til $x \cdot 1.06^{55}$ kroner. Jonas ønsker jo at dette beløpet skal være minst 1 000 000, som gir oss ulikheten

$$x \cdot 1.06^{55} \geq 1000000.$$

Løser vi for x får vi

$$x \geq \frac{1000000}{1.06^{55}} \approx 40567.$$

Det betyr at hvis Jonas får mer enn 40567 kroner til konfirmasjonen sin, kan han nyte livet på Granca når han blir gammel.