Øving - Bevisføring og implikasjon - LF

$\boxed{1}$ Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn.

(i) Nils Arne bor på Lademoen.

(ii) Nils Arne bor i Trondheim.

(iii) Nils Arne bor i byen der RBK spiller sine hjemmekamper.

(iv) Nils Arne bor i Norge.

- (i) $\implies$ (ii) fordi hvis Nils Arne bor på Lademoen, så bor han garantert i Trondheim, men han kan bo i Trondheim uten å bo på Lademoen.
- (ii) $\iff$ (iii) fordi Trondheim er nøyaktig den byen der RBK spiller sine hjemmekamper.
- (iii) $\implies$ (iv) fordi hvis Nils Arne bor i byen der RBK spiller sine hjemmekamper, så bor han i Norge fordi RBK spiller sine hjemmekamper i en by i Norge, men det er fullt mulig å bo i Norge uten å bo i byen der RBK spiller sine hjemmekamper.

Merk også at f.eks. (i) $\implies$ (iv) siden (i) medfører (ii) som medfører (iii) som medfører (iv).

$\boxed{2}$ Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn.

(i) $x = 3$

(ii) $x^2 = 9$

(iii) $x = \pm 3$

(iv) $|x| = 3$

(v) $x = -3$

- (i) $\implies$ (ii), fordi hvis $x = 3$ må $x^2 = 9$, men vi kan ha at $x^2 = 9$ uten at $x = 3$.
- (ii) $\iff$ (iii), fordi hvis $x^2 = 9$ så kan ikke x være noe annet enn 3 eller -3, og hvis $x = \pm 3$, så vil $x^2 = 9$.
- (iii) $\iff$ (iv), fordi hvis $x = \pm 3$, så vil absoluttverdien til x garantert være 3, og hvis $|x| = 3$, så kan ikke x være noe annet enn 3 eller -3.
- (iv) $\impliedby$ (v) fordi hvis $x = -3$, så vil $|x| = 3$, men vi kan ha at $|x| = 3$ uten at $x = -3$.

$\boxed{3}$ La n være et heltall. Vi skal vise at

$$n^2 \text{ er et oddetall} \implies n \text{ er et oddetall.}$$

Vi viser den kontrapositive påstanden, nemlig at

$$\begin{aligned} n \text{ er ikke et oddetall} &\implies n^2 \text{ er ikke et oddetall, eller} \\ n \text{ er et partall} &\implies n^2 \text{ er et partall.} \end{aligned}$$

Så anta at n er et partall. Det vil si at $n = 2k$ for en eller annen $k \in \mathbb{Z}$. Da er $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$. Så n^2 har en faktor 2 og er dermed et partall. Da har vi vist at hvis n er et partall, må n^2 være et partall, og dermed har vi også vist at hvis n^2 ikke er et partall, kan heller ikke n være et partall.

$\boxed{4}$ Vi ønsker å vise at $\sqrt{3}$ ikke er et rasjonalt tall. Vi antar det motsatte og ser om det fører til en selvmotsigelse. Så vi antar at $\sqrt{3}$ er et rasjonalt tall. Da finnes det heltall m og n slik at $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$. Videre kan vi anta at m og n ikke har noen felles faktorer. Da vil

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \iff m^2 = 3n^2.$$

Nå har vi to ulike tilfeller vi må se på: (i) n er et partall, og (ii) n er et oddetall.

- Hvis n er et partall, så vil n^2 også være et partall. Videre vil da $3n^2$ være et partall, og dermed er m^2 et partall. Men hvis m^2 er et partall, vil også m være et partall. Men det betyr at både m og n er partall, som vil si at begge har en faktor 2, som går mot antagelsen vår om at m og n ikke har noen felles faktorer.

- Hvis n er et oddetall, vil også n^2 være et oddetall. Videre vil da $3n^2$ være et oddetall, og dermed er m^2 et oddetall. Hvis m^2 er et oddetall, vil også m være et oddetall. Så nå er både m og n oddetall. Det betyr at vi kan skrive $m = 2k + 1$ og $n = 2q + 1$, for $k, q \in \mathbb{Z}$. Da får vi

$$\begin{aligned} m^2 &= 3n^2 \\ (2k+1)^2 &= 3(2q+1)^2 \\ 4k^2 + 4k + 1 &= 12q^2 + 12q + 3 \\ 4k^2 + 4k &= 12q^2 + 12q + 2 \\ 2k^2 + 2k &= 6q^2 + 6q + 1 \\ 2(k^2 + k) &= 2(3q^2 + 3q) + 1. \end{aligned}$$

  Vi legger merke til at venstre side av ligningen er et partall, mens høyre siden er et oddetall. Siden det er en ligning skal de to sidene være like, men det finnes jo ikke noe heltall som er både et partall og et oddetall.

Vi har nå sett at vi får en selvmotsigelse både når n er et partall og når n er et oddetall. Dermed må antagelsen vi gjorde i starten om at $\sqrt{3}$ er et rasjonalt tall være feil. Det betyr at $\sqrt{3}$ ikke er rasjonalt, eller $\sqrt{3}$ er irrasjonalt, om man vil.

$\boxed{5}$ La n være et heltall. Vi ønsker å vise at dersom $n^2 - 6n + 5$ er et partall, så må n være et oddetall. Vi viser den kontrapositive påstanden, nemlig

$$n \text{ er et partall} \implies n^2 - 6n + 5 \text{ er et oddetall.}$$

La n være et partall. Da kan vi skrive $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Da vil

$$\begin{aligned} n^2 - 6n + 5 &= (2k)^2 - 6(2k) + 5 \\ &= 4k^2 - 12k + 5 \\ &= 4k^2 - 12k + 4 + 1 \\ &= 4(k^2 - 3k + 1) + 1. \end{aligned}$$

$4(k^2 - 3k + 1)$ er et partall, så $4(k^2 - 3k + 1) + 1 = n^2 - 6n + 5$ må være et oddetall. Da har vi vist at hvis n er et partall, så er $n^2 - 6n + 5$ et oddetall. Dermed må det også være sant at hvis $n^2 - 6n + 5$ er et oddetall, så må n være et partall.

$\boxed{6}$ Vi ønsker å vise at det ikke finnes noen heltall a, b slik at $a^2 - 4b = 2$. Vi antar det motsatte og ser om det fører til en selvmotsigelse. Vi antar altså at det finnes hele tall a og b, slik at $a^2 - 4b = 2$. Da vil

$$a^2 = 4b + 2 = 2(2b + 1),$$

så a^2 er et partall. Det betyr at a er et partall, så $a = 2k$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Det betyr at vi får

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &= 2 \\ (2k)^2 - 4b &= 2 \\ 4k^2 - 4b &= 2 \\ 2k^2 - 2b &= 1 \\ 2(k^2 - b) &= 1. \end{aligned}$$

Nå vil $(k^2 - b)$ være et heltall, så 1 må være et partall. Men vi vet jo godt at 1 ikke er et partall, så vi har en selvmotsigelse. Det betyr at antagelsen vi gjorde i starten om at det finnes hele tall a og b slik at $a^2 - 4b = 2$ ikke kan være riktig.

$\boxed{7}$ a) Vi skal vise at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for alle heltall $n \geq 1$. Vi viser først at likheten gjelder for $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6}.$$

Vi viser så at dersom likheten gjelder for en vilkårlig $n = k$, så må den også gjelde for $n = k + 1$. Vi antar at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Dette er induksjonshypotesen (IH). Da vil

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= (k+1)\left(\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}\right) \\ &= (k+1)\left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big)}{6} \end{aligned}$$

I likheten merket med $(*)$ har vi brukt at $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$. Denne faktoriseringen kan vi finne f.eks. ved å bruke abc-formelen. Da har vi vist at påstanden holder for $n = 1$, og at dersom den holder for en vilkårlig $n = k$, holder den også for $n = k + 1$. Siden den da holder for $n = 1$, må den holde for $n = 2$, og da må den holde for $n = 3$, og da må den holde for $n = 4$ osv.

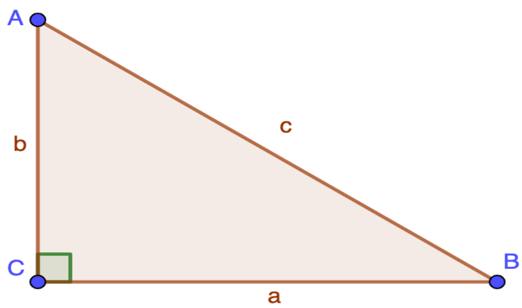
b) Vi skal vise at $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle heltall $n \geq 1$. Vi viser først at påstanden gjelder for $n = 1$: $4^1 - 1 = 3$, som definitivt er delelig med 3. Vi viser så at dersom påstanden holder for en vilkårlig $n = k$, vil den også holde for $n = k + 1$. Så anta at $4^k - 1$ er delelig med 3 for en vilkårlig $k \in \mathbb{N}$. Da vil det finnes et naturlig tall m slik at $4^k - 1 = 3m$, eller med andre ord at $4^k = 3m + 1$. Dette er induksjonshypotesen (IH). For $n = k + 1$ får vi da at

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \cdot 4^k - 1 \\ &\overset{\text{IH}}{=} 4(3m+1) - 1 \\ &= 12m + 3 \\ &= 3(4m+1), \end{aligned}$$

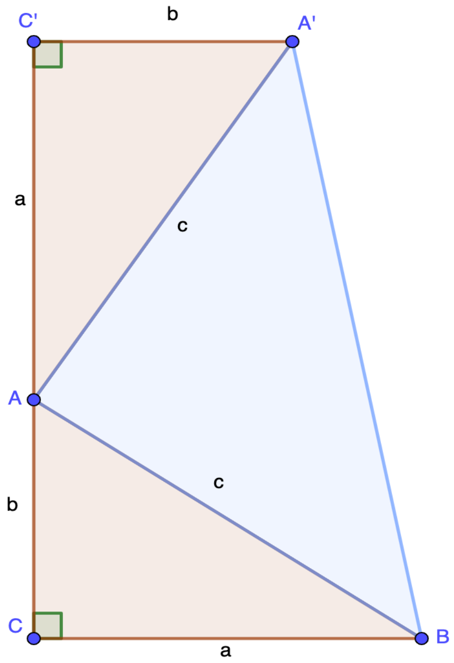
som er delelig med 3. Da har vi vist at påstanden holder for $n = 1$, og at dersom påstanden holder for en vilkårlig $n = k$, holder den også for $n = k + 1$. Da har vi altså vist ved induksjon at $4^n - 1$ er delelig med 3, for alle heltall $n \geq 1$.

$\boxed{8}$ I denne oppgaven skal vi gi et bevis for den pytagoreiske læresetning, som sier at for følgende rettvinklede trekant, så er summen av kvadratene av katetenes lengder lik kvadratet av hypotenusens lengde, det vil si:

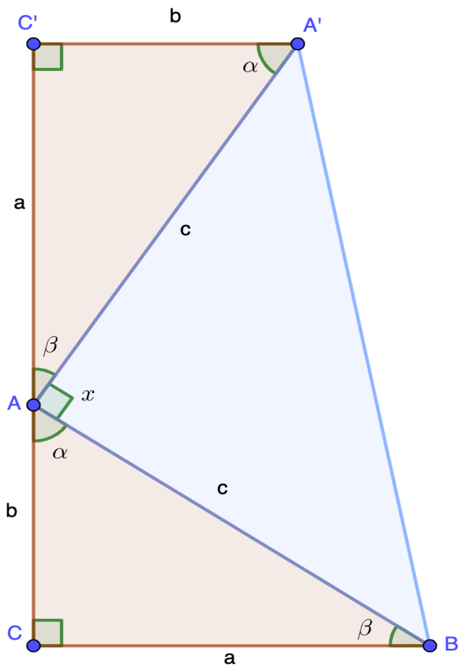
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Vi vil bevise dette resultatet på samme måte som daværende kongressmedlem, og senere president i USA, James A. Garfield gjorde i 1876. Garfield kopierte trekanten og roterte og flyttet litt på den og endte opp med følgende trapes, der linjestykket AC' er en forlengelse av CA:



c) Vi ønsker først å vise at den nye trekanten som dukket opp er rettvinklet. La $\angle A'AB = x$. Vi legger først merke til at trekantene $\triangle CBA$ og $\triangle C'AA'$ er kongruente, siden den andre er lik den første bare rotert og flyttet litt. Spesielt finner vi da de samme vinklene i de to trekantene. Vi navngir vinklene som på figuren under.



Siden trekantene er rettvinklede, vil $\alpha + \beta = 90°$. Siden AC' er en forlengelse av CA, er linjestykket CC' et rett linjestykke. Dermed må $\alpha + \beta + x = 180°$. Det følger da at $x = 90°$.

d) Arealet av trapeset kan skrives på to måter, enten ved å bruke arealformelen for et trapes, eller ved som summen av arealene til de tre trekantene. Arealet til et trapes der de parallelle sidene har lengder a og b, og høyden har lengde h, er gitt ved

$$A = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Vårt trapes har høyde $(a+b)$, så arealet er gitt ved

$$A = \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Vi kan også uttrykke arealet som summen av arealene til tre trekanter. De to trekantene $\triangle CBA$ og $\triangle C'AA'$ har begge areal

$$A_{\triangle CBA} = \frac{1}{2}ab.$$

Siden $\triangle A'AB$ er rettvinklet har den areal

$$A_{\triangle ABA'} = \frac{1}{2}c^2.$$

Dermed er arealet av trapeset gitt ved

$$A = 2 \cdot A_{\triangle CBA} + A_{\triangle ABA'} = ab + \frac{1}{2}c^2.$$

e) De to uttrykkene vi fant i oppgave b) er to uttrykk for det samme arealet, så de må være like. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a+b)^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2 \\ \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2, \end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise.