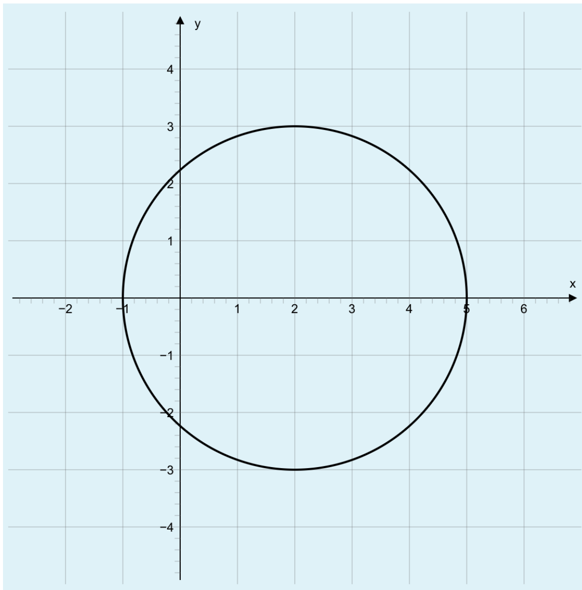
Øving - Geometri og trigonometri LF

$\boxed{1}$ Finn en likning for sirkelen i figuren under.



En sirkel med radius r og sentrum i punktet (x_0, y_0) har ligning $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Sentrum av sirkelen vår ligger i $(2, 0)$ og den har radius 3. Ligningen for sirkelen er dermed $(x-2)^2+y^2 = 9$.

$\boxed{2}$ Vi bruker radianer i stedet for grader, og har at $60^\circ = \pi/3$ radianer. Delen av pannekaka som ligger i første kvadrant kan deles i tre deler: området D som vi er interessert i, den rettvinklede trekanten som har hypotenus med lengde r, og resten av det som ligger i første kvadrant, som er en sirkelsektor. Den delen av pannekaka som ligger i første kvadrant har areal $A_1 = \frac{\pi r^2}{4}$. Trekanten har grunnlinje $r\cos(\pi/3)$ og høyde $r\sin(\pi/3)$. Arealet av trekanten er dermed

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cos(\pi/3)\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{8}r^2.$$

Sirkelsektoren som står igjen har areal

$$A_{\text{sektor}} = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}r^2.$$

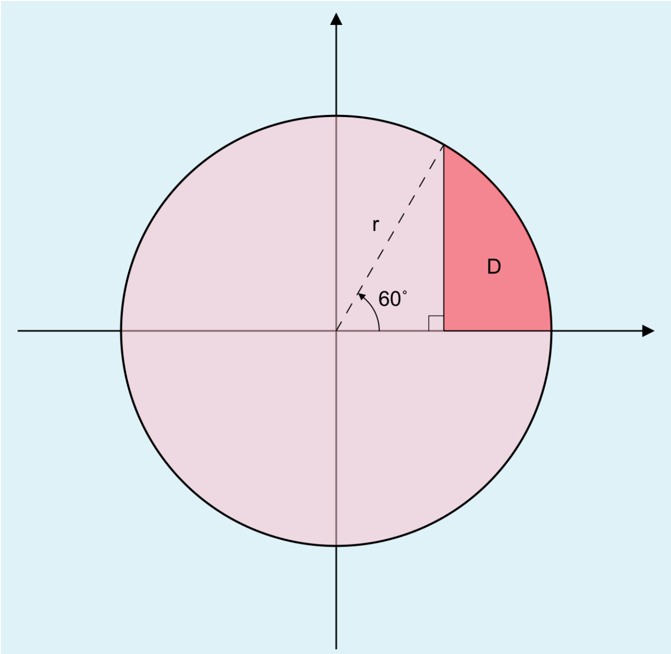
Området D har dermed areal

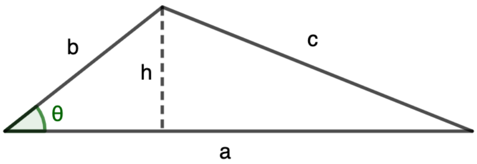
$$A_D = A_1 - A_\Delta - A_{\text{sektor}} = (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8})r^2.$$

Hele pannekaka har areal $A_{\text{tot}} = \pi r^2$, så Landstrykeren får

$$\frac{A_D}{A_{\text{tot}}} = \frac{(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8})r^2}{\pi r^2} \approx 9.78\%$$

av pannekaka.





3 La oss hjelpe Aladdin ved å utlede en generell formel for arealet av en trekant når vi vet alle sidelengdene. Vi tegner først en figur:
Her har vi en trekant med sidelengder a, b og c og høyde h. Vi kaller vinkelen mellom sidene a og b for θ. Legg først merke til at

$$\sin\theta = \frac{h}{b} \iff h = b\sin\theta.$$

Det betyr at arealet kan skrives som

$$A = \frac{1}{2}(\text{grunnlinje}) \cdot (\text{høyde}) = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

Videre gir cosinussetningen oss at

$$c^2 = a^b + b^2 - 2ab\cos\theta, \text{ eller } \cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vi har vi en fin trigonometrisk identitet som sier at

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

som gir oss at

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

Setter vi inn uttrykket for $\cos\theta$ vi har over, får vi at

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}.$$

Det betyr at arealet av trekanten kan skrives som

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab}.$$

Nå kan vi egentlig plugge inn for eksempel $a = 7, b = 3$ og $c = 5$ og få at $A \approx 6.4952$, men hvis vi passer på å holde tunga rett i munnen og bruker kvadratsetningene kan vi gjøre formelen litt penere:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\big(2ab - (a^2+b^2-c^2)\big)\big(2ab + (a^2+b^2-c^2)\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)\big)\big((a^2+2ab+b^2) - c^2\big)} \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\big(c^2 - (a-b)^2\big)\big((a+b)^2 - c^2\big)} \\
&\overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{(c-(a-b))(c+(a-b))((a+b)-c)((a+b)+c)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},
\end{aligned}$$

der

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

I likhetene merket med $(*)$ har vi brukt tredje kvadratsetning (konjugatsetningen) og i likheten merket med $(**)$ har vi brukt første og andre kvadratsetning. Formelen

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ med } s = \frac{a+b+c}{2}$$

og der a, b og c er sidelengdene i en trekant, kalles Herons formel og er oppkalt etter Heron fra Alexandria. Med sidelengdene 3, 5 og 7 som gitt i oppgaven, får vi $s = 15/2$ og

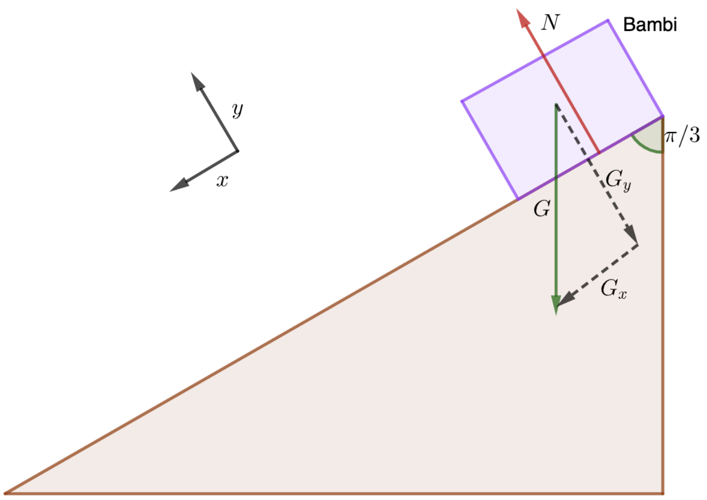
$$A = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-7\right)\left(\frac{15}{2}-3\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \approx 6.4952.$$

$\boxed{4}$ Vi starter med å tegne en figur. For enkelhets skyld antar vi for anledningen at Bambi er en firkantet kloss, som sklir nedover skråplanet. Kreftene som virker på Bambi er normalkraften N fra underlaget, og tyngdekraften $G = mg$, der m er massen til Bambi og g er tyngdeakselerasjonen, $g = 9.81$ m/s^2. Tyngdekraften har en komponent G_y vinkelrett på skråplanet og en komponent G_x parallellt med skråplanet. Newtons andre lov sier at summen av kreftene som virker på klossen er lik massen til klossen ganget med akselerasjonen, eller

$$\Sigma F = ma.$$

Vi er ute etter akselerasjonen nedover skråplanet, som vi har definert som positiv x-retning. Siden det er null friksjon, er G_x den eneste kraften som virker i denne retningen. Det betyr at i x-retning har vi

$$\Sigma F = G_x,$$



og dermed

$$G_x = ma.$$

Merk at når vi dekomponerer tyngdekraften får vi en ny liten rettvinklet trekant, der vi finner igjen vinkelen $\pi/3$ mellom G og G_x. Da får vi at

$$\cos(\pi/3) = \frac{G_x}{G} \iff G_x = G\cos(\pi/3) = mg\cos(\pi/3).$$

Det betyr at

$$ma = mg\cos(\pi/3)$$

eller

$$a = g\cos(\pi/3) = 9.81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos(\pi/3) = 4.91\ \text{m/s}^2.$$

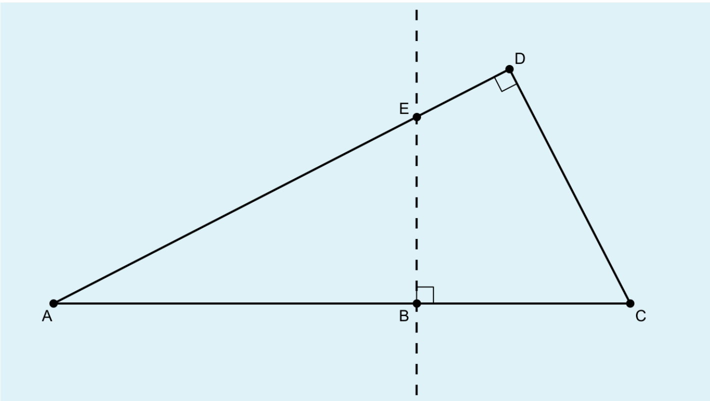
$\boxed{5}$ Vi legger merke til at de to trekantene $\triangle BEA$ og $\triangle DCA$ er formlike, siden de deler en vinkel i A og begge har en vinkel på 90 grader. Da må også siste vinkel være lik i de to trekantene, og dermed er de formlike. Det betyr at

$$\frac{BE}{AE} = \frac{DC}{AC}.$$

Vi løser for BE og får

$$BE = \frac{DC \cdot AE}{AC} = \frac{11 \cdot 17}{24} = \frac{187}{24} \approx 7.79\ \text{m}.$$

Hoppet holder altså til en solid verdensrekord hvis vi antar at hopperen er en kvinne, og en knepen verdensrekord hvis vi antar at hopperen er en mann som hopper tidlig på 1920-tallet.


D
E
A
B
C