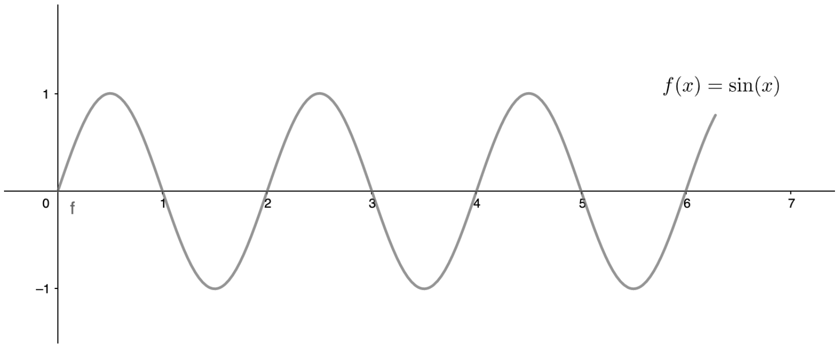
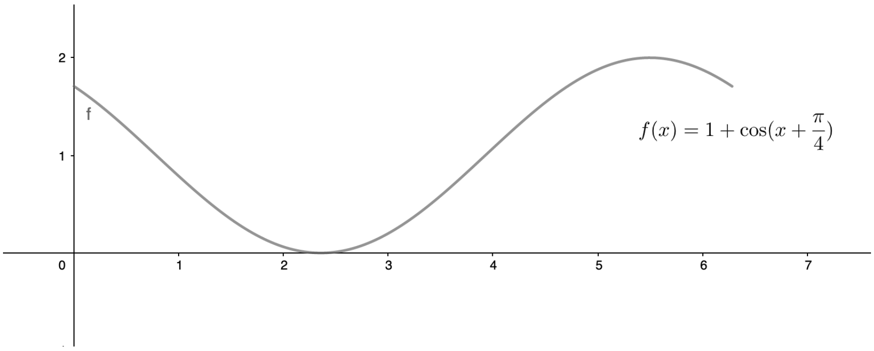
Øving - Funksjoner og grafer

$\boxed{1}$ Skissér grafene for $x \in [0, 2\pi]$.

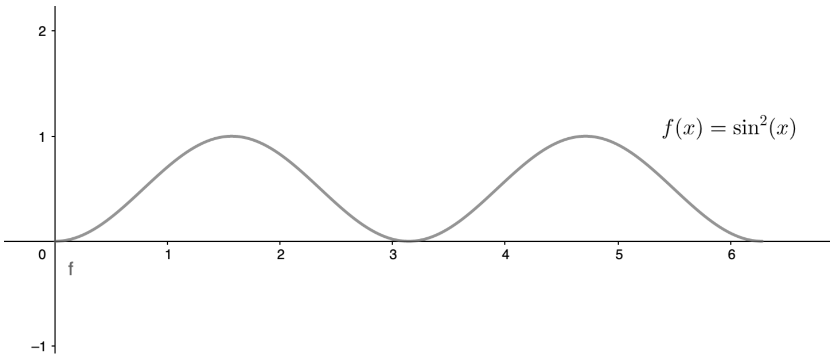
a) $\sin(\pi x)$



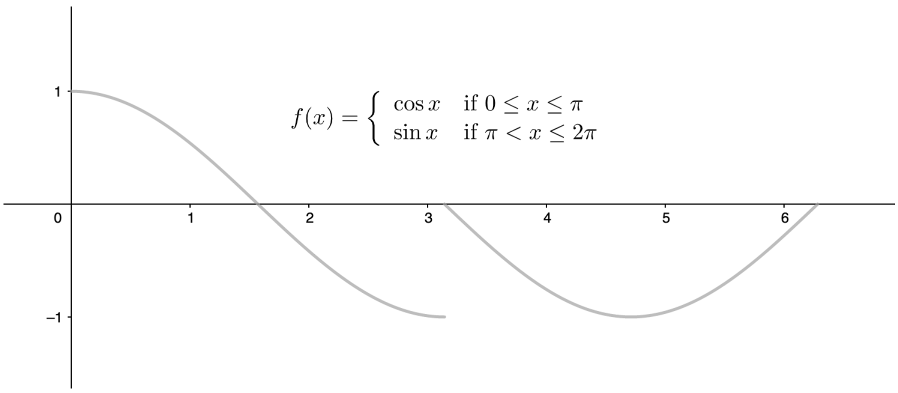
b) $1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$



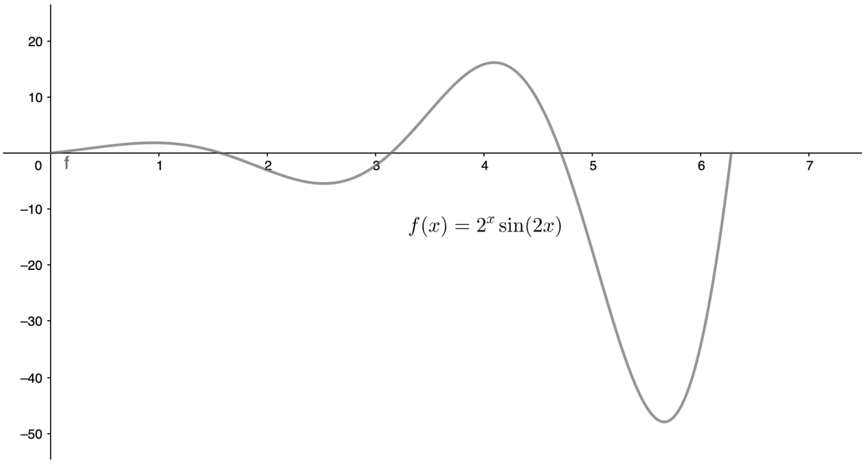
c) $\sin^2 x$



d) $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ hvis } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x \text{ hvis } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$



e) $2^x \sin(2x)$



$\boxed{2}$ La $p(x) = x^5((x-2)^2 + 2x - 5)^8$.

a) Hva er graden til polynomet $p(x)$?

Først og fremst: graden til et polynom er eksponenten til den høyeste potensen av x. Vi kan finne graden til $p(x)$ ved å gange ut alt av parenteser og se hva den høyeste potensen er, men det ser litt arbeidsomt ut.

La oss i stedet se litt nærmere på parentesen som skal opphøyes i 8. Det som står inni parentesen er

$$(x-2)^2 + 2x - 5 = x^2 - 4x + 4 + 2x - 5 = x^2 - 2x - 1.$$

Dette har altså grad 2. Parentesen skal ganges med seg selv 8 ganger, så dette andregradsleddet vil bli ganget med seg selv 8 ganger. Det vil resultere i et ledd $(x^2)^8 = x^{16}$, altså et ledd av grad 16. Dette vil være den høyeste potensen etter at parentesen er ganget ut. Dette skal så ganges med x^5, som resulterer i et ledd $x^5 x^{16} = x^{5+16} = x^{21}$. Dette vil være den høyeste potensen til slutt, og $p(x)$ har dermed grad 21.

b) Finn alle røttene til $p(x)$.

Røttene til $p(x)$ er alle tall x_0 slik at $p(x_0) = 0$, altså nullpunktene til $p(x)$. Vi vet at dersom $a \cdot b = 0$ der a og b er vilkårlige tall, så må enten $a = 0$ eller $b = 0$. Vi vet også at $0^n = 0$, for alle positive heltall n. Fra oppgave a) har vi at

$$p(x) = x^5(x^2 - 2x - 1)^8.$$

Så hvis

$$p(x) = x^5(x^2 - 2x - 1)^8 = 0,$$

så må enten

$$x = 0$$

eller

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Vi løser den siste ligningen vha. abc-formelen:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Så røttene til $p(x)$ er

$$0, 1 + \sqrt{2} \text{ og } 1 - \sqrt{2}.$$

c) Faktoriser $p(x)$ så mye som mulig (dvs. som et produkt av lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter).

Et andregradspolynom

$$x^2 + bx + c$$

kan faktoriseres som

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2),$$

der x_1 og x_2 er røttene til polynomet. Bruker det vi fant i oppgave b) får vi at

$$x^2 - 2x - 1 = (x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2})) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Dermed kan vi faktorisere $p(x)$ slik:

$$p(x) = x^5\left((x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})\right)^8 = x^5(x - 1 - \sqrt{2})^8(x - 1 + \sqrt{2})^8.$$

$\boxed{3}$ La f være en funksjon. Vi sier at f er en jevn funksjon dersom $f(-x) = f(x)$ og at f er en odde funksjon dersom $f(-x) = -f(x)$. Hvis f ikke oppfyller noen av disse egenskapene, så er f verken jevn eller odde. Angi om følgende funksjoner er odde, jevne eller ingen av delene.

I disse oppgavene regner vi rett og slett ut $f(-x)$ og ser om det blir lik $f(x)$, $-f(x)$ eller ingen av delene.

a) $f(x) = x^2 + 1$

Vi regner ut $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

$f(x) = x^2 + 1$ er en jevn funksjon.

b) $f(x) = \sqrt{2x}$

Vi ser at

$$f(-x) = \sqrt{2(-x)} = \sqrt{-2x} \neq f(x),$$

og

$$-f(x) = -\sqrt{2x} \neq f(-x).$$

$f(x) = \sqrt{2x}$ er verken en jevn eller odde funksjon.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x}$

Vi regner ut $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + (-x)} = \frac{1}{-x^3 - x} = \frac{1}{-(x^3 + x)} = -\frac{1}{x^3 + x} = -f(x).$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x}$ er en odde funksjon.

d) $f(x) = x + x^2$

Vi ser at

$$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2 \neq f(x)$$

og at

$$-f(x) = -(x + x^2) = -x - x^2 \neq f(-x).$$

$f(x) = x + x^2$ er verken en jevn eller odde funksjon.

$\boxed{4}$ Finn største mulige definisjonsmengde til funksjonene under. Bestem så verdimengden.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Funksjonen er ikke definert for $x = 0$, men alle andre tall går fint. Så definisjonsmengden er $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Videre kan vi få funksjonsverdien så stor eller liten vi vil i både positiv og negativ retning, men den kan aldri bli null. Så verdimengden er $V_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) $f(x) = |x|$

Absoluttverdifunksjonen er definert for alle reelle tall, så $D_f = \mathbb{R}$. Men absoluttverdien til et tall vil aldri være negativt, så funksjonen kan bare gi ut positive tall eller null. Verdimengden er altså $V_f = [0, \infty)$.

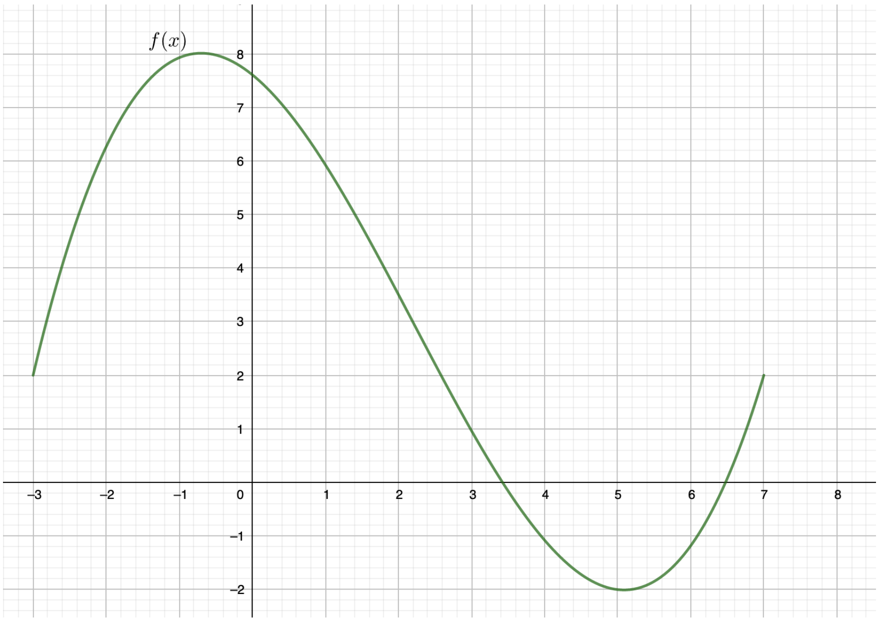
c) $f(x) = \sqrt{6 - 3x}$

Kvadratroten er ikke definert for negative reelle tall, så vi må ha at

$$\begin{aligned} 6 - 3x &\geq 0 \\ 6 &\geq 3x \\ x &\leq 2. \end{aligned}$$

Definisjonsmengden er altså $D_f = (-\infty, 2]$. Kvadratrotfunksjonen er stigende, og gir ikke ut negative tall. Hvis $x = 2$ er $f(x) = 0$. Verdimengden er altså $V_f = [0, \infty)$.

d) Funksjonen f beskrevet av følgende graf:



Her må vi bare lese av sånn omtrentlige verdier. Av grafen ser det ut til at funksjonen er definert mellom $x = -3$ og $x = 7$, så definisjonsmengden er $D_f = [-3, 7]$ (eller en åpen eller halvåpen variant av dette intervallet). Minste funksjonsverdi ser ut til å være -2 og største funksjonsverdi ser ut til å være 8. Så verdimengden er (sånn omtrent) $V_f = [-2, 8]$.

$\boxed{5}$ Bruk fortegnsskjema (for f og dens deriverte) til å skissere funksjonen

$$f(x) = (x^2 - 1)^3.$$

Vi legger først merke til at $f(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$ og at $f(0) = -1$. Grafen vil med andre ord krysse y-aksen i $y = -1$. Funksjonen har nullpunkter når

$$x^2 - 1 = 0,$$

det vil si når

$$x = \pm 1.$$

Vi kan altså skrive om $f(x)$ til

$$f(x) = \big((x-1)(x+1)\big)^3 = (x-1)^3(x+1)^3.$$

Vi deriverer f og får

$$f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot (x^2-1)' = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2 = 6x(x+1)^2(x-1)^2.$$

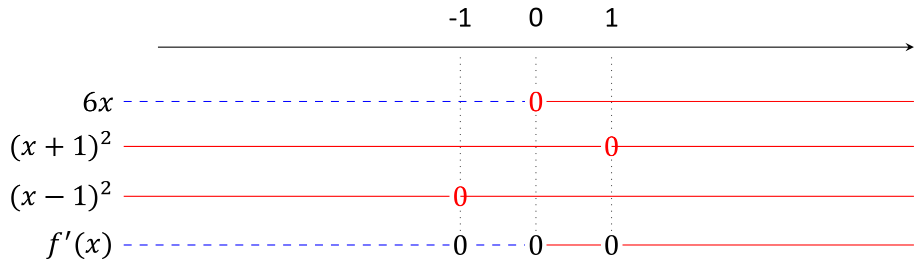
Vi ser at $f'(x)$ har nullpunkter når

$$x = 0,$$

og når

$$x^2 - 1 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \pm 1.$$

Vi tegner fortegnsskjema for $f'(x)$:



Vi ser av fortegnsskjemaet at $f'(x)$ er negativ og dermed at $f(x)$ avtar på intervallet $(-\infty, 0)$ og at $f'(x)$ er positiv og dermed at $f(x)$ øker på intervallet $(0, \infty)$. Siden vi også vet at $f(x) = 0$ når $x = \pm 1$ og at grafen krysser y-aksen i $y = -1$, vil grafen bli seende omtrent slik ut: