Kapittel 1

Tallmengder og funksjoner

I dette kapitlet skal vi ta for oss noen helt grunnleggende ting, nemlig mengdelære, tallmengder og funksjoner.

Mengder

En mengde er en samling med ting, kalt elementer. Som regel er elementene tall For eksempel er

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en mengde med fem elementer, og

$$B = \{1, 3, 5, \pi\}$$

en mengde med fire elementer.

Vi kan sette sammen mengder til nye mengder. To vanlige operasjoner på mengder, er union:

$$\cup$$

og snitt:

$$\cap$$

Unionen mellom to mengder er en ny mengde som inneholder alle elementer som er enten den ene eller den andre mengden:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$$

mens snitt er en ny mengde som inneholder de elementene som er i begge mengder:

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Dersom alle elementer i en mengde A er inneholdt i en større mengde B, skriver vi

$$A \subset B.$$

Dette er det samme som å si at

$$A \cap B = A.$$

Vi skriver

$$A - B$$

for mengden av alle elementer som er i A, men ikke i B, og

$$\overline{A}$$

for alle elementer som ikke er i A. Vi skriver

$$A \subset B$$

dersom alle elementene i A også er i B, og

$$A \subseteq B$$

dersom enten $A \subset B$ eller $A = B$.

> Definisjon. En ordnet mengde er en mengde der det finnes en relasjon $<$ slik at
>
> - kun en av
>
> $$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$
>
>   gjelder
> - dersom $x < y$ og $y < z$ er $x < z$

En ordnet mengde $A \subset B$ er begrenset ovenfra dersom det finnes $y \in B$ slik at $x \leq y$ for alle $x \in A$. Vi sier at y er en øvre skranke. Dersom ingen $z < y$ er en øvre skranke for A, kalles y en minste øvre skranke.

Tallmengder

En tallmengde er en mengde med tilhørende operasjoner for å kombinere elementer til nye elementer. Tallmengder har antagelig eksistert lengre enn skriftsystemer. De første rudimentære skriftsystemer oppsto i forbindelse med handelsbokføring i Mesopotamia for litt over fem tusen år siden. Streker ble skrevet med en butt penn for å holde styr på antall, mens andre symboler (kalt piktografer, og skrevet med skarpere penn), ble funnet opp for det vi idag kaller substantiv - korn, øltønner, fisk, og så videre.

Vi skal møte fem forskjellige tallmengder:

- De naturlige tallene $\mathbb{N}$
- De hele tallene $\mathbb{Z}$
- De rasjonale tallene $\mathbb{Q}$
- De reelle tallene $\mathbb{R}$
- De komplekse tallene $\mathbb{C}$

De fire første er du mest sannsynlig kjent med fra før. De relle tallene er temmelig hårete å definere presist. Vi skal ikke gjøre det, men nøye oss med å forklare hvorfor de rasjonale tallene ikke er tilstrekkelige - de mangler noen viktige tall. Det femte tallmengdet, de komplekse tallene, skal vi bare så vidt smake på i dette semesteret. For disse fem tallmengdene gjelder at

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Aksiomer for kropp

De tre tallmengdene $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er eksempler på noe som kalles kropp. En kropp er et tallmengde med to operasjoner, addisjon ($+$) og og mutliplikasjon ($\cdot$). Det er vanlig å sløyfe gangetegnet, og skrive

$$x \cdot y = xy.$$

La F være en kropp. [1] Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for addisjon:

1 F er lukket under addisjon:
$x, y \in F \quad \Longrightarrow \quad x + y \in F$

2 Addisjonen er assositativ:
$(x + y) + z = x + (y + z)$

3 Addisjonen er kommutativ:
$x + y = y + x$

4 Additiv identitet:
Det finnes et element 0 slik at $x + 0 = x$

5 Additiv invers:
For hver x finnes et element y slik at $x+y = 0$

Det additive inverselement til x skrives $-x$. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for multiplikasjon:

6 F er lukket under multiplikasjon:
$x, y \in F \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \in F.$

7 Mutliplikasjonen er assositativ:
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

8 Multiplikasjonen er kommutativ:
$x \cdot y = y \cdot x.$

9 Multiplikativ identitet:
Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x$.

10 Multiplikativ invers:
For hver $x \neq 0$ finnes et element y slik at $x \cdot y = 1$.

Det additive inverselement til x skrives $1/x$ eller $\frac{1}{x}$. Til slutt er det et aksiom for rekkefølgen på regneoperasjonene.

11 Operasjonene er distributive:
$(x + y) \cdot z = xz + yz.$

Fra disse aksiomene kan alt vi trenger utledes. Merk at 0 er sin egen additive invers.

Eksempel 1.1. Hvis du går på fest og sier du er matematiker, spør folk gjerne “hvorfor er $(-1) \cdot (-1) = 1$, egentlig?” Merk først at

$$y \cdot x = y \cdot (x + 0) = y \cdot x + y \cdot 0$$

Dersom vi legger til $-y \cdot x$ på begge sider, står vi igjen med

$$0 = y \cdot 0,$$

så det at null ganger noe må være null, følger av aksiomene. Vi kan så bruke at

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (-1) \\ &= (1 - 1) \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= -1 + (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

og konkludere med at -1 og $(-1) \cdot (-1)$ må summere til null. Altså er de hverandres additive invers, og derfor må $(-1) \cdot (-1) = 1$. △

Eksempel 1.2. Du opererer med et tallmengde basert på $\mathbb{Z}$ når du ser på klokken. Dersom klokken er ti om morgenen, og du skal gå hjem fra gløs om syv timer, får du det relevante klokkeslettet ved å regne ut

$$10 + 7 = 5.$$

Dette kalles klokkearitmetikk, og tallmengdet heter $\mathbb{Z}_{12}$. Dette er ikke en kropp, men $\mathbb{Z}_n$ er dersom n er et primtall. Den minste kroppen er $\mathbb{Z}_2$, og den har kun elementene 0 og 1. △

Definisjon. En ordnet kropp er en kropp som er en ordnet mengde og i tillegg tilfredsstiller

- $x + y < x + z$ når $y < z$
- $xy > 0$ når $x > 0$ og $y > 0$

Naturlige tall

De naturlige tallene har bokstavene, og består av de tallene du bruker når du teller:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 ...\}$$

$\mathbb{N}$ er en ordnet mengde, men ikke en kropp, for alle elementer i dette tallmengdet mangler additiv invers, og de aller fleste mangler multiplikativ invers.

Et primtall er et tall som kun er delelig med 1 og seg selv, og som er større enn eller lik 2. En fun fact som er grei å kjenne til, er at alle hele tall kan faktoriseres i primtall på en entydig måte. Det er fornuftig å definere at 1 ikke er et primtall, for ellers hadde ikke dette vært sant.

Eksempel 1.3. $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ △

Eksempel 1.4. $51 = 3 \cdot 17$ △

Eksempel 1.5. $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ △

Hele tall

Det er ofte slik at nye tallmengder lages dersom man mangler noen tall i det tallmengdet man har. De hele tallene

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 ...\}$$

er et godt eksempel på dette. De er ikke så gamle, og oppsto i forbindelse med løsning av polynomlikninger. Akkurat som $\mathbb{N}$, er $\mathbb{Z}$ ordnet, men ikke en kropp, for de aller fleste elementene mangler multiplikativ invers.

[1] Kropp heter ’field’ på engelsk. En artigere oversettelse ville kanskje vært ’felt’, ’åker’, ’eng’, eller ’bane’.

Rasjonale tall

De rasjonale tallene, $\mathbb{Q}$, altså alle brøker

$$\frac{m}{n}$$

der m og n er hele tall, er mye eldre enn de hele tallene. Å dele tre epler likt mellom fem mennesker har nok vært en problemstilling lenge før skriftsystemer oppsto. Denne tallmengden er en ordnet kropp, men har noen alvorlige defekter. Det mangler noen viktige tall!

Eksempel 1.6. Det finnes ingen hele tall slik at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Dette kan vi bevise som følger. Anta at det finnes hele tall m og n slik at likningen over holder. Vi kan anta at m og n ikke har noen felles faktorer, for hvis de hadde hatt det, kunne vi bare forkortet brøken til de ikke lenger hadde det. Vi ganger nå hele likningen med n, og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, på da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n. △

Reelle tall

Men $\sqrt{2}$ burde definitivt være et tall, siden det er diagonalen i et kvadrat med sidekant 1. Men i $\mathbb{Q}$ finnes det altså ikke noe tall for denne lengden. Georg Cantor publiserte den første ordentlige definisjonen av $\mathbb{R}$ de reelle tallene i 1871. Dette er en ganske komplisert konstruksjon, og det er på sin plass med et sitat fra Walter Rudins klassiker fra 1953, "Principles of Mathematical Analysis":

> " Experience has convinced me that it is pedagogically unsound (though logically correct) to start off with the construction of the real numbers from the rational ones. "

Med andre ord skal vi la den formelle konstruksjonen ligge i fred, og heller prøve å forklare med hva de reelle tallene har som de rasjonale mangler.

> Teorem 1.7. Alle øvre begrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke. Alle nedre begrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en største nedre skranke.

Eksempel 1.8. Vi studerer mengden av alle tall r slik at $r^2 < 2$. La oss kalle mengden A. Denne mengden har ikke noe største element, dersom du tar et tilfeldig element r i mengden, og danner

$$q = \frac{2p+2}{p+2}$$

så vil $r^2 < q^2 < 2$. Men A har derimot en minste øvre skranke, nemlig $\sqrt{2}$. Alle $r \in A$ er mindre enn $\sqrt{2}$, og det finnes ingen tall under $\sqrt{2}$ som er større enn alle $r \in A$. △

Eksempel 1.9. Vi studerer mengden av alle rasjonale tall p slik at $p^2 < 2$. Denne mengden har likeledes ikke noe største element, Men mengden har heller ingen minste øvre skranke, for $\sqrt{2}$ er ikke et rasjonalt tall. Alle rasjonale tall større enn $\sqrt{2}$ er en øvre skranke for mengden, og uansett hvilken øvre skranke man velger, er det mulig å finne en øvre skranke som er mindre. △

Dersom $a < b$, skriver vi

$$(a, b)$$

for mengden av alle tall større enn a og mindre enn b. Dette kalles et åpent intervall. Vi skriver

$$[a, b]$$

for mengden av alle tall større enn eller lik a og mindre enn eller lik b. Dette kalles et lukket intervall.

Komplekse tall

De komplekse tallene, $\mathbb{Z}$, er et tallmengde som i likhet med negative tall oppsto i forbindelse med løsning av polynomlikninger. Likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

har ingen løsning blant noen av de foregående tallmengdene, og derfor har man kommet til at det er best å definere et helt nytt tall i, som har egenskapen at

$$i^2 = -1.$$

Tallet i kalles den den imaginære enheten. Det kunne vært fristende å 'løse' likningen $x^2 + 1 = 0$ for x, og definere

$$i = \sqrt{-1}.$$

Men vi må være litt forsiktige med denne strategien. Regneregelen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

gjelder ikke når både a og b er negative tall. Dette vises av følgende klassiske eksempel:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Men vi kan allikevel tillate oss å bruke det nye tallet i til å skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = \pm 2i.$$

Eksempel 1.10. Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

at

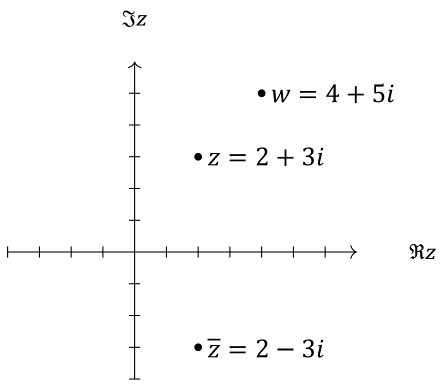
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad \triangle$$

Eksemplet over inspirerer oss til å definere komplekse tall som

$$z = a + bi.$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis realdelen og imaginærdelen til z, og skrives gjerne $\Re z$ og $\Im z$. Mengden av alle komplekse tall skrives $\mathbb{C}$. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene,for dersom $b = 0$, er z reell.

Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i det komplekse planet.



Det komplekse planet

La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$:

$$z + w = a + c + (b + d)i$$

$$z - w = a - c + (b - d)i$$

$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

De to første er trivielle. Vi beviser gangeregelen:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deleregelen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Komplekse tall legges altså sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$!

Eksempel 1.11. La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$.

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} - \frac{2}{41}i. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z konjugert:

$$\overline{z} = a - bi$$

Her er et par regneregler:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$

Merk til slutt at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall. Dette tallet er avstanden fra z til origo, kalles gjerne modulus eller absoluttverdien til z, og skrives $|z|$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Funksjoner

En funksjon $f : A \to B$ er en regel som for hvert element i mengden A tilordner ett (og bare ett) element i mengden B. Vi skriver $y = f(x)$ for å signalisere at $y \in B$ er elementet som korresponderer til $x \in A$. Mengden A kalles definisjonsmengden eller domenet, mens B kalles kodomenet. De elementene i B som faktisk er verdier til funksjonen f, skrives $f(A)$. Denne mengden kalles verdimengden eller rekkevidden. Vi snakker gjerne om en funksjon 'på A', og vi kan ha $f(A) \subset B$ eller $f(A) = B$.

Så og si all matematikk du skal lære de neste to årene, handler om funksjoner. Vanligvis beskriver vi funksjoner ved å bruke en matematiske likninger, men funksjoner kan også beskrives ved en tabell eller en graf. Hovedpoenget er at ett og bare ett element i B skal spesifiseres for hvert element i A.

Eksempel 1.12. Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x^2$$

tar inn et reelt tall og kvadrerer det. $\triangle$

Eksempel 1.13. Funksjonen $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ gitt ved

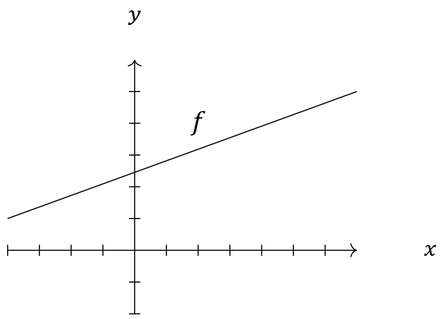
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tar inn et reelt tall og inverterer det. Det er ikke lov å dele på null, og derfor må denne lukes ut av definisjonsmengden. $\triangle$

Det er korrekt å bruke ordet funksjon om f, men ordet funksjonsverdi om $f(x)$, og en funksjon er ikke ordentlig definert før både definisjonsmengden og regelen er definert. Men vi fraviker av og til fra dette. Dersom ikke definisjonsmengden er eksplisitt definert, er det gjerne underforstått hva den er (som regel $\mathbb{R}$). Det hender vi bruker teknisk gale uttrykksmåter, som 'funksjonen $f(x)$', men dette er for å slippe å bruke så mange ord.

Eksempel 1.14. Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ tar inn et reelt tall og inverterer det. Nå er det underforstått at definisjonsmengden er $\mathbb{R} - \{0\}$. △

Eksempel 1.15. Koordinatsystemet vi bruker i dag, med x- og y-aksen, kalles det kartesiske koordinatsystem, etter Rene Descartes, som innførte det i en bok i 1637. En funksjonen kan beskrives av en graf i et koordinatsystem, men det er noen føringer på hvordan grafen kan se ut. Dette kommer vi tilbake til senere. △



Eksempel 1.16. Et polynom av orden n er en funksjon $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med funksjonsuttrykk

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Studiet av polynomer er et av de eldste i matematikkens historie, antagelig noen tusen år gammelt. René Descartes oppfant standardnotasjonen vi bruker i dag, med koeffisienter hentet fra begynnelsen av alfabetet, og variable fra slutten av alfabetet. Polynomer er enkle å arbeide med av mange forskjellige grunner. △

Eksempel 1.17. Funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved

$$f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2$$

vokser fryktelig fort med n. Vi skal få bruk for denne funksjonen flere ganger dette semesteret. △

Eksempel 1.18. En funksjon på $\mathbb{N}$ kalles gjerne en følge. Vi skal donere et helt kapittel til følger senere i semesteret. △

I noen tilfeller kan det la seg gjøre å skrive om likningen $y = f(x)$ til $x = g(y)$.

Definisjon. En funksjen $f : A \to B$ er injektiv dersom $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer at $x_1 = x_2$, og surjektiv dersom det for hver $y \in B$ finnes en x slik at $f(x) = y$. Dersom f er både injektiv og surjektiv, sier vi at f er bijektiv.

Dersom $f : A \to B$ er injektiv, kan vi alltid løse likningen $y = f(x)$ for x. Da får vi en likning på formen $x = g(y)$. Funksjonen $g : B \to A$ kalles den inverse funksjonen, og vi skriver

$$g = f^{-1}.$$

Dersom vi setter g inn i f eller f inn i g, får vi

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x.$$

Dersom f ikke er injektiv, finnes det $x_1 \neq x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Hvis det fantes en invers funksjon g, ville denne måttet ta både x_1 og x_2 som funksjonsverdier i $f(x_1) = f(x_2)$. Dette er ikke lov, og følgelig kan ikke g eksistere.

Eksempel 1.19. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^3.$$

Da er

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$ △

Eksempel 1.20. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Denne funksjonen har ingen invers. Den er ikke injektiv, for $f(-x) = f(x)$. △

Eksempel 1.21. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Denne funksjonen har ingen invers. Den er ikke injektiv, for $f(-x) = f(x)$ for alle x. △

Hvorvidt f injektiv, avhenger både av funksjonsuttrykket og definisjonsmengden.

Eksempel 1.22. La $f : [0,1] \to [1,2]$ være gitt ved

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Denne funksjonen har den inverse funksjonen $g : [1,2] \to [0,1]$ gitt ved

$$g(x) = \sqrt{x-1}.$$ △