Kapittel 8

Kontinuerlige funksjoner

I dette kapitlet skal vi begynne på envariabel funksjonsteori. Dette har du lært mye om på gymnaset.

Grenseverdier

Jeg skjønte ingenting av grenseverdier når jeg gikk på skolen. Grunnen er veldig enkel. Bøkene vi brukte, prøvde å forklare grenseverdibegrepet uten å skrive opp definisjonen i det hele tatt, og dette er en ganske vanlig strategi blant lærebokforfattere.

Anta at man har en funksjon f. Grenseverdien

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

forteller oss noe om hva som skjer med f når den avhengige variabelen x går mot verdien x_0. For de fleste funksjoner man støter på i dagliglivet, er

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

men dette er ikke alltid riktig.

Definisjon. En funksjon sies å ha grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Eksempel 8.1. Vi prøver å finne

$$\lim_{x \to 0} \exp(x).$$

Hva kan L være? Vi ser først av definisjonen at

$$\exp(0) = 1,$$

Dette forteller ikke nødvendigvis at

$$\lim_{x \to x_0} \exp(x) = 1,$$

men vi kan ha det som arbeidshypotese, og undersøke saken nærmere. La $|x| < 1$. Det følger at

$$\begin{aligned} |\exp(x) - 1| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\ &= |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= |x|(e-1). \end{aligned}$$

Velg ϵ. Dersom $|x| \leq \frac{\epsilon}{e-1}$ vil

$$|\exp(x) - 1| \leq |x|(e-1) \leq \frac{\epsilon}{e-1}(e-1) = \epsilon$$

Altså er grenseverdien en. Vi merker oss at grenseverdien og funksjonsverdien i $x = 0$ er begge er en. Dette skal vi komme tilbake til. △

Eksempel 8.2. For den konstante funksjonen

$$f(x) = 1$$

gjelder at

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$$

overalt. Dette er lett å se. Velg ϵ. Vi har at

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0,$$

så her kan δ velges til hva som helst. △

Eksempel 8.3. Det første ordens polynomet

$$f(x) = ax + b$$

har grenseverdien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = ax_0 + b.$$

Dette er også lett å se. Velg ϵ. Vi har at

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)|.$$

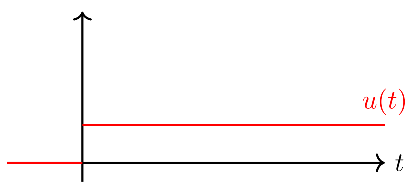
Dersom vi velger $\delta = \epsilon/|a|$, og krever $0 < |x - x_0| < \delta$, får vi

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon. \qquad \triangle$$

Eksempel 8.4. Heavisidefunksjonen er gitt ved

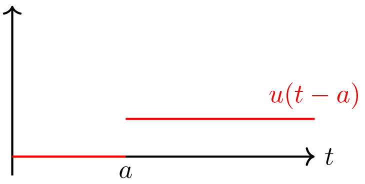
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Man kan tenke på denne som en funksjon som slår noe på ved $t = 0$:



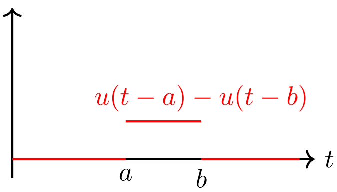
Vi kan slå på ved tiden $t = a$ istedet:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$



Vi kan også slå på ved $t = a$ og av igjen ved $t = b$:

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$



Grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} u(x)$$

eksisterer ikke. Hva skulle den i så fall vært? Fra venstre ser det ut til at u går mot null, mens fra høyre ser det ut til at u går mot en. △

Eksempel 8.5. $\frac{1}{x}$ △

Eksempel 8.6. $\sin \frac{1}{x}$ △

Eksemplet over inspirerer oss til følgende definisjon.

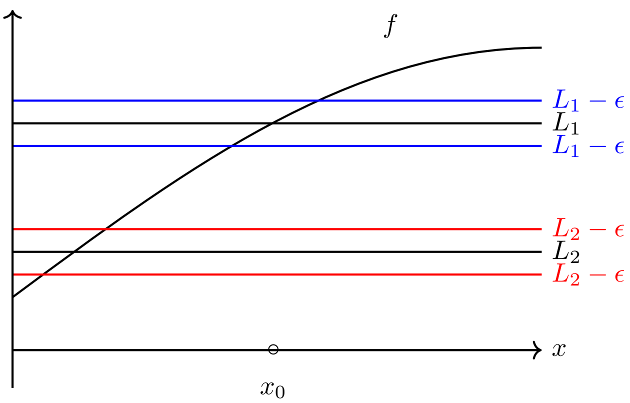
Definisjon. Ensidige grenser?

Teorem 8.7. *En grenseverdi, dersom den eksisterer, er entydig.*

Bevis. Anta vi har to grenseverdier $L_1 \neq L_2$. Velg $\epsilon < |L_1 - L_2|/2$, og δ slik at

$$|f(x) - L_1| < \epsilon.$$

Hm, øvingsopplegg kanskje. Se figur. □



Teorem 8.8. *Anta vi har to funksjoner f og g, med*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \quad og \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

og la c være et tall. Da gjelder at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) &= L_1 + L_2 \\ \lim_{x \to x_0} cf(x) &= cL_1 \\ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) &= L_1 L_2 \\ \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) &= L_1/L_2 \quad (L_2 \neq 0) \end{aligned}$$

Eksempel 8.9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

△

Bevis. Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge δ slik at $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$ impliserer

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned} &|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| = \\ &\quad |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| < \\ &\quad\quad |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \end{aligned}$$

Siden f og g har respektive grenseverdier L_1 og L_2 i x_0, kan vi velge δ slik at $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$ impliserer

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|g(x) - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$ at

$$|f(x) - L_1 + g(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise. De to andre reglene bevises på liknende måte, men det er litt mer regning. Vi tar det i øvingsopplegget. □

Det neste teoremet kalles gjerne skviseteoremet, for det handler om en funksjon som blir skvist mellom to andre funksjoner.

Teorem 8.10. *Anta at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ på et intervall som inneholder x_0, og at*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Da er

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

Eksempel 8.11. $x \sin \frac{1}{x}$ △

Kontinuitet

En kontinuerlig funksjon er en funksjon hvis graf kan tegnes uten å løfte blyanten fra rutepapiret. For å gjøre dette presist, bruker vi grenseverdibegrepet.

Definisjon. En funksjon sies å være *kontinuerlig* i x_0 dersom

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

I definisjonen over er det underforstått at både $f(x_0)$ og $\lim_{x \to x_0} f(x)$ må eksistere. Dersom en funksjon ikke er definert i x_0, eller funksjonen ikke har noen grenseverdi i x_0, eller at disse to eksisterer, men er ulike, sier vi at funksjonen er *diskontinuerlig* i x_0.

Eksempel 8.12. Polynomer er kontinuerlige. Vi vet at $f(x) = x$ er kontinuerlig, og et uttrykk på formen

$$p(x) = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

er følgelig også kontinuerlig. $\triangle$

Eksempel 8.13. En rasjonal funksjon er en funksjon på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomer. Disse er kontinuerlige overalt der $q(x) \neq 0$. $\triangle$

Eksempel 8.14. Eksponensialfunksjonen er kontinuerlig for alle x. Dette er lett å vise med multiplikasjonsformelen. Vi har at

$$\begin{aligned} \exp(x+h) - \exp(x) &= \exp(x)\exp(h) - \exp(x) \\ &= \exp(x)(\exp(h) - 1) \end{aligned}$$

Når $h \to 0$, vil $\exp(h) \to 1$, og likningen over viser at $\exp(x+h) \to \exp(x)$. $\triangle$

Eksempel 8.15. Heavisidefunksjonen er ikke kontinuerlig i $x = 0$. $\triangle$

Eksempel 8.16. Absoluttverdifunksjonen er kontinuerlig. $\triangle$

Skjæringssetningen

maksminsetningen