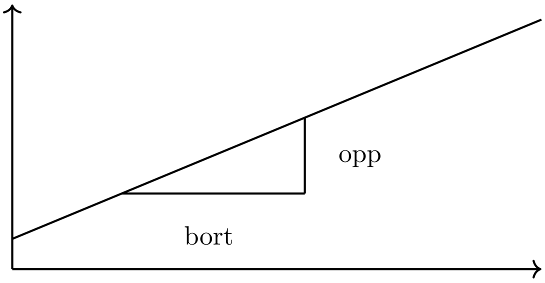
Kapittel 9

Derivasjon

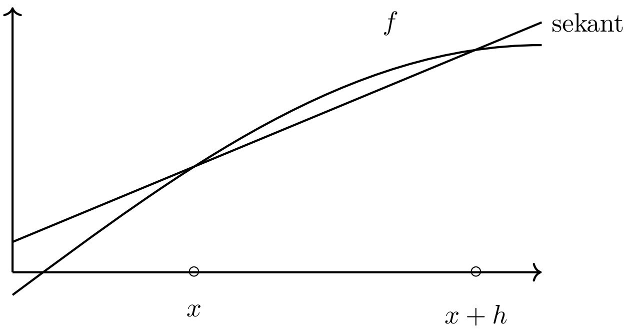
Det er et interessant faktum at Newton fant ut av differensialregning flere hundre år før noen skjønte hva de reelle tallene egentlig var.

Stigningstall

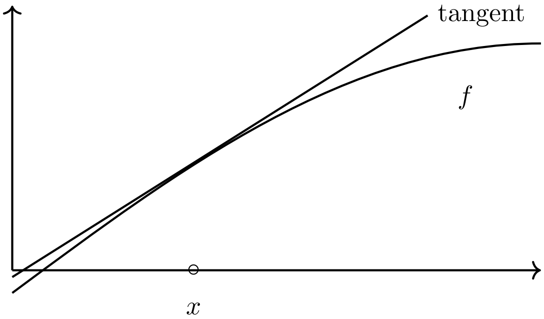
Stigningstallet til en rett linje er opp delt på bort.



La f være en funksjon. En *sekant* er en rett linje som skjærer grafen til f lokalt i to punkter:



En *tangent* er en rett linje som tangerer grafen til f i et punkt:



Man kan tenke på dette som en sekant der de to skjæringspunktene er sammenfallende. Stigningstallet til tangenten i x_0 er det vi mener når vi snakker om stigningstallet til f i x_0. Nå skal vi definere nøyaktig hva vi mener med dette.

Definisjon. Vi definerer den deriverte til f i punktet x som

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer. Vi sier i så fall at f er *deriverbar* i x.

Vi skriver også

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Noen ganger er denne notasjonen mer praktisk. Siden grenseverdier er entydige, ser vi at den deriverte er entydig bestemt dersom den eksisterer. Likningen for tangenten til f i punktet x_0 er gitt ved

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Eksempel 9.1. La $f(x) = x$. Vi beregner

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \qquad \triangle$$

Eksempel 9.2. La $f(x) = \exp x$. Produktregelen for eksponensialfunksjonen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} \\ &= \exp x \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} \\ &= \exp x \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = \exp x. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Teorem 9.3. *Dersom en funksjon er deriverbar i et punkt, er den også kontinuerlig i punktet.*

Bevis. Dersom

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

skal eksistere, må både $f(x)$ og

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)$$

eksistere, og de må være like. Altså er f kontinuerlig i x. □

Derivasjonsregler

Teorem 9.4. *La f og g være deriverbare funksjoner. Følgende regler gjelder. (Den tredje gjelder kun når $g(x) \neq 0$.)*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Bevis. Vi vet at

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og at

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Addisjonsregelen er rett fram:

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

For produktregelen må vi sjonglere litt mer:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

□

Eksempel 9.5. La $f(x) = x^2$. Vi beregner

$$f'(x) = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

△

Eksempel 9.6. La $f(x) = x^n$, der $n \in \mathbb{N}$. Vi viser at

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ved induksjon. De to foregående eksemplene viser at regelen gjelder for $n = 1$ og $n = 2$. Induksjonssteget er å vise at likningen

$$\frac{d}{dx}x^n n = nx^{n-1}$$

impliserer

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n.$$

Vi bruker multiplikasjonsregelen på den første, og får

$$\left(x^{n+1}\right)' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (nx^{n-1}) = (n+1)x^n.$$

Bruker vi derivasjonsregelen for rasjonale funksjoner, ser vi at regelen også gjelder for $n \in \mathbb{Z}$. Det går også an å vise at regelen gjelder dersom $n \in \mathbb{R}$, men dette er mye vanskeligere. △

Teorem 9.7.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Eksempel 9.8. La $f(x) = \cos x$. Vi bruker kjerneregelen, og får

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{i\exp(ix) - i\exp(-ix)}{2} \\ &= -\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = -\sin x.\end{aligned}$$

Sinus i øvingsopplegg. △

Ekstremalpunkter

Definisjon. Dersom det finnes en δ slik at

$$0 < |x - y| < \delta \implies f(p) > f(x),$$

sier vi at p er et *lokalt maksimum* for f.

Teorem 9.9. *Dersom f er en funksjon på (a, b), har et lokalt maksimum i x, og $f'(x)$ er definert, er $f'(x) = 0$.*

Vi kan også ha lokalt maksimum i endepunkter, og i punkter der f eller f' er diskontinuerlig.

Sekantsetningen

Teorem 9.10. *Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b), finnes $c \in (a, b)$ slik at*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorem 9.11. *Anta at f er deriverbar på (a, b). Dersom $f' \geq 0$ på (a, b) er f monotont stigende på (a, b).*

Bevis. Dette følger av sekantsetningen □

Teorem 9.12. *Dersom f er monoton, eksisterer f^{-1}.*

Eksempel 9.13. Den naturlige logaritmen △

Eksempel 9.14. Inverse trigonometriske △