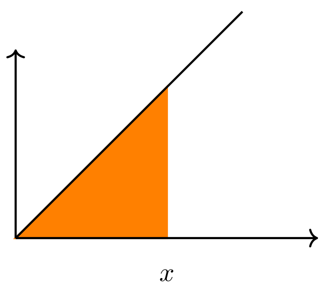
Kapittel 10

Integrasjon

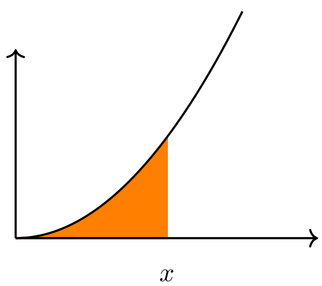
Integrasjon er som ketsjup. Det kan brukes til alt. Vi kan beregne areal, volum, arbeid, kraft, trykk, massesenter, væskeflyt og elektrisk ladning. Det er ikke den ting man ikke kan bruke integrasjon til. Jeg bruker det i mørkerommet når jeg skal beregne totalkontrasten i bildet dersom jeg må ty til split grade printing. I dette semesteret skal vi fokusere mest på areal, for det er den anvendelsen som er enklest å forstå.

La f være en begrenset funksjon på et intervall $[a, b]$. Det store spørsmålet er å finne arealet under grafen til f. Det går an å ta en lang diskusjon om hva areal egentlig er, og da må man sette opp aksiomer for areal (litt som vi gjorde for tallsystemer), og utlede integrasjonsteorien fra dem. Dette er imidlertid en litt langdryg prosess, så vi skal basere relasjonen mellom integralet og arealet under grafen på geometrisk intuisjon.

Eksempel 10.1. Noen integraler kan vi enkelt beregne geometrisk. La $f(x) = x$. En rask titt på grafen forteller at arealet under denne grafen og mellom 0 og x er $\frac{1}{2}x^2$, siden dette er en rettvinklet trekant der høyde og bredde er x. △



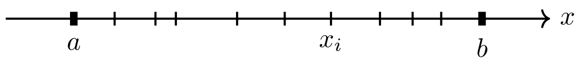
Eksempel 10.2. La $(x) = x^2$. Arealet under grafen er $\frac{1}{3}x^3$. Dette er endel mer jobb å vise enn i forrige eksempel, men ble oppdaget av Arkimedes for over to tusen år siden. Vi bruker i prinsippet den samme metoden som ham. △



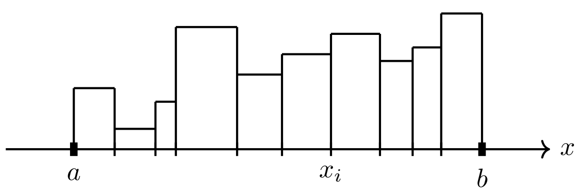
Integralet

For å bygge opp integralteorien er det essensielt å starte med begensede funksjoner på lukkede intervaller. Det går an å utvide integrasjonsteorien til ubegrensede funksjoner og ubegrensede intervaller, og det skal vi se på så vidt til slutt i kapitlet.

Definisjon. En *partisjon* P av intervallet $[a, b]$, er en inndeling av intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i, der $x_0 = a$ og $x_n = b$. Mengden av delingspunkter kalles gjerne et *gitter.*



Definisjon. En *stegfunksjon* er en stykkvis konstant funksjon. Statistikere kaller det gjerne *histogram.*



Merk at vi kan skrive en stegfunksjon som en lineærkombinasjon av enhetssprangfunksjoner. Dette er som oftest ikke en hensiktsmessig notasjon, og det er enklere å bruke forskrift.

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in [x_0, x_1) \\ f_2 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ f_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Forbundet med en stegfunksjon er summen

$$s = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

som beskriver arealet under grafen.

Definisjon. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. La

$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x)$$

og

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x).$$

En *øvre riemannsum* er

$$U(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

en *nedre riemannsum* er

$$L(P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Definisjon. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. Det *øvre riemannintegralet* er:

$$I_U = \sup_P U(P)$$

Det *øvre riemannintegralet* er:

$$I_L = \inf_P U(P)$$

Dersom f er begrenset, er det lett å se at I_U og I_L eksisterer. Spørsmålet er om de er like. Dersom de er det sier vi at f er *integrerbar.*

Definisjon. Dersom

$$I_L = I_U$$

definerer vi

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx = I_L = I_U.$$

I valget mellom

$$\int_a^b f \quad \text{og} \quad \int_a^b f(x)\, dx$$

er den første i prinsippet å foretrekke, siden den er mer konsis. Men noen ganger er det nødvendig å bruke den andre, for eksempel når man skal integrere en konkret funksjon som er avhengig av parametre i tillegg til x:

$$\int_0^1 ax^2\, dx = \frac{a}{3}$$

Det kan være ganske vanskelig å avgjøre hvilke funksjoner som er integrerbare, men noen eksempler er mulig å regne ut.

Eksempel 10.3. La f være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Denne er diskontinuerlig overalt, og ikke integrerbar. Siden $m_i = 0$ og $M_i = 1$ for alle i og alle partisjoner, er $I_L = 0 \neq 1 = I_U$. Dette eksemplet kan fremstå som noe patologisk. Men vi skal se i et senere kapittel at denne funksjonen kan konstrueres ved hjelp av cosinusfunksjonen og to grenseverdiprosesser. △

Teorem 10.4. *En funksjon f er integrerbar hvis og bare hvis det for hver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon slik at*

$$|U(P) - L(P)| < \epsilon$$

Bevis. Tvinge sammen I_L og I_U. □

Teoremet over kan hjelpe oss til å finne noen integraler direkte fra definisjonen. Dette er ikke mulig å gjøre for mange funksjoner, og i neste avsnitt skal vi se at vi kan bruke antiderivasjon istedet. Men det er viktig å forstå riemannsummer når man skal igang med fysiske anvendelser av integrasjon, så vi tar med et eksempel.

Eksempel 10.5. Vi beregner

$$\int_0^b x\, dx.$$

La oss ta en jevn partisjon, der punktene er gitt ved:

$$x_k = \frac{bk}{n}.$$

Vi beregner en typisk nedre riemannsum:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k &= \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{(n-1)}{n} \end{aligned}$$

Her er en øvre:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{(n+1)}{n} \end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at $f(x) = x$ er integrerbar. Velg $\epsilon > 0$. En rask kikk på

$$U(P) - L(P) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{(n+1)}{n} - \frac{(n-1)}{n} \right) = \frac{b^2}{n}$$

forteller at dersom vi velger

$$n > \frac{b^2}{\epsilon}$$

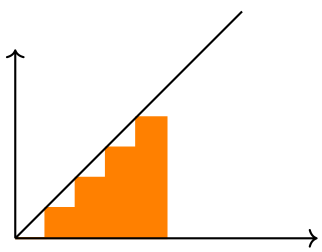
har vi

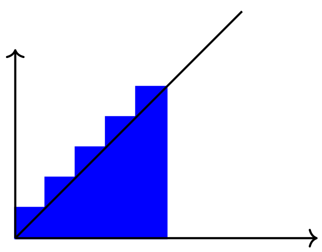
$$|U(P) - L(P)| < \epsilon.$$

Siden

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

ser det ut til at integralet blir $\frac{b^2}{2}$. △





Bare for at det ikke skal være noen tvil:

Teorem 10.6. *Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, er f integrerbar på $[a, b]$.*

Bevis. Siden f er kontinuerlig på $[a, b]$, er f begrenset på $[a, b]$, og vi kan finne en partisjon □

Teorem 10.7. *Dersom f er begrenset og stykkvis kontinuerlig på $[a, b]$ med et endelig antall diskontinuiteter, er f integrerbar på $[a, b]$.*

Beviset for dette teoremet er litt vel teknisk, så vi dropper det, men resultatet trengs litt senere.

Grunnleggende egenskaper

I dette avsnittet skal vi ikke bevise noen teoremer, for bevisene er lange, litt tekniske, men ikke spesielt vanskelige. Vi skal istedet akkompagnere med noen illustrerende geometriske figurer.

Teorem 10.8. *Integrasjon er en lineær operator. La f_1 og f_2 være integrebare funksjoner, og c_1 og c_2 vilkårlige konstanter. Da er*

$$\int_a^b c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\, dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

Teorem 10.9. *Anta at $|f| < M$ på $[a, b]$. Da er*

$$\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq M(b - a).$$

Teorem 10.10.

$$\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$$

En versjon av sekantsetningen finnes for integraler. Den kalles gjerne *middelverdisatsen.*

Teorem 10.11. *Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, finnes en $c \in [a, b]$ slik at*

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f\, ds.$$

Grunnen til navnet er at uttrykket

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f\, ds$$

gir middelverdien f, i den forstand at dersom f byttes ut med en konstant funksjon med denne verdien, får integralet den samme verdien. Middelverdisatsen sier at f må innom denne verdien på vei fra a til b.

Integrasjon og derivasjon

Arealet under grafen er alltid en kontinuerlig funksjon.

Teorem 10.12. *La f være en begrenset og integrerbar funksjon på $[a, b]$. Da er*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds$$

en kontinuerlig funksjon.

Bevis. Velg $\epsilon > 0$, og anta $|f| \leq M$. Da er

$$|F(x)| \leq M(b - a)$$

og følgelig er

$$|F(x) - F(y)| \leq \left| \int_x^y f\, ds \right| \leq M|x - y|.$$

Dersom vi velger

$$|x - y| < \frac{\epsilon}{M},$$

er

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| < \epsilon,$$

slik at F er kontinuerlig i x. □

Integrasjon og derivasjon er på sett og vis inverse operasjoner, og det finnes en stor klasse av integrerbare funksjoner som har en antiderivert.

Teorem 10.13. *La f være en kontinuerlig i $x = c$. Da er*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds$$

deriverbar i $x = b$, og

$$F'(c) = f(c).$$

Bevis. □

Det neste teoremet kalles gjerne *analysens fundamentalteorem.*

Teorem 10.14. *La f være integrebar på $[a, b]$. Dersom det finnes en funksjon F slik at $F' = f$, er*

$$\int_a^b f(s)\, ds = F(b) - F(a).$$

Bevis. Hm skal vi gå for adams eller rudin her? □

Her er en annen variant. Den kalles gjerne *taylors teorem.*

Teorem 10.15. *La f være en n ganger kontinuerlig deriverbar funksjon. Da er*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{1}{(n + 1)!} \int_a^x f^{n+1}(s)\, ds$$

Bevis. □

Eksempel 10.16. Det finnes funksjoner som ikke har antiderivert, for eksempel

$$f(x) = \exp(x^2).$$

Denne er fortsatt integrerbar. △

Noen anvendelser

Vi tar med en liten bit om anvendelser av integrasjon til slutt.

Numerisk integrasjon

Riemannsummer kan brukes som utgangspunkt for å designe noen enkle metoder for numerisk integrasjon.

Eksempel 10.17. riemannsum △

Eksempel 10.18. trapesmetoden △

Uegentlige integral

Et integral definerer en funksjon

$$F(x) = \int_a^x f\ ds,$$

og det er ingenting i veien for å beregne

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^\infty f\ ds.$$

Dersom

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty,$$

kan vi også prøve å beregne

$$\lim_{x\to c} \int_a^x f\ ds.$$

Disse kalles *uegentlige integraler*. Dersom grenseverdiene eksisterer, sier vi at integralene konvergerer.

Nå tar vi noen klassiske eksempler.

Eksempel 10.19.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \log a = \infty.\end{aligned}$$

△

Eksempel 10.20.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \lim_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = 1\end{aligned}$$

△

Rotasjonslegemer

Man kan tenke at man tar grafen til f på $[a, b]$, og dreier den en gang rundt x-aksen. Da får man et *rotasjonslegeme*. Volumet er gitt ved

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx.$$

Eksempel 10.21. Et artig eksempel kalles *Gabriels trompet*. Vi roterer funksjonen $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om x-aksen. Volumet av dette legemet er

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx = \pi.$$

Eksemplet kalles Gabriels trompet fordi rotasjonslegemet ser ut som en uendelig lang trompet. △

Integraltesten for rekker

Teorem 10.22. *La f være en begrenset funksjon. Integralet*

$$\int_a^\infty f(x)\ dx$$

og rekken

$$\sum_{n=a}^\infty f(n)$$

er enten begge konvergente, eller begge divergente.

Laplacetransform

Laplacetransform er en teknikk vi skal bruke til løse ordinære differensiallikninger. For det første er det en mye mer elegant teknikk enn den du lærte i M3, og for det andre takler den en bredere klasse av likninger.

La f være en funksjon definert for $t \geq 0$. Laplacetransformen til f er:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt = F(s).$$

Først kan man spørre seg hvilke funksjoner det er naturlig å finne laplacetransformen til. Vi noterer oss at $\mathcal{L}(f)$ er definert ved et uegentlig integral, og at dette bør konvergere.

Teorem 10.23. *La f en stykkvis kontinuerlig funksjon, og la a og $M > 0$ være reelle tall slik at*

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Integralet

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt.$$

konvergerer absolutt dersom $s > a$.

Bevis. Vi beregner:

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}\ dt \leq$$
$$M\int_0^\infty e^{at}e^{-st}\ dt \leq M\int_0^\infty e^{(a-s)t}\ dt = \frac{M}{s-a}. \square$$

Eksempel 10.24. Vi kan ikke beregne

$$\mathcal{L}(e^{t^2}) = \int_0^\infty e^{t^2-st}\ dt,$$

for e^{t^2} vokser for fort. Siden

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2-st} = \infty$$

kan integralet ikke konvergere. $\triangle$

Eksempel 10.25. Så lenge $s > a$, kan vi fint beregne

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a}. \qquad \triangle$$

Eksempel 10.26. Vi kan også beregne

$$\mathcal{L}(0) = \int_0^\infty 0e^{-st}\,dt = 0. \qquad \triangle$$

Laplacetransform kan fremstå som noe umotivert. Men den kan brukes til å løse differensiallikninger, som vi skal se senere i semesteret.