Kapittel 6

Rekkeutvikling

Vi er vant med å skrive om funksjoner. For eksempel kan funksjonsuttrykket

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

like gjerne skrives

$$f(x) = \cos 2x.$$

I dette kapitlet skal vi ta et steg videre, og skrive funksjoner som uendelige summer av tilsynelatende ikkerelaterte funksjoner.

Eksempel 6.1.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \triangle$$

Eksempel 6.2.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \qquad \triangle$$

Potensrekker

En *potensrekke* er en rekke på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Vi har allerede vært borti dette da vi definerte eksponensialfunksjonen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

og den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

En *analytisk* funksjon f er en funksjon definert ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Det første spørsmålet å stille er hvilke x rekken på høyre side konvergerer for. Dette er åpenbart forskjellig fra rekke til rekke. Eksponensialfunksjonen konvergerer for alle x, mens den geometriske rekken kun for $|x| < 1$.

Teorem 6.3. *Konvergensradius*

Teorem 6.4. *integrasjon og derivasjon*

Taylorrekker

Teorem 6.5. *taylors formel*

Numerisk derivasjon

Taylorrekker kan brukes til å utlede en stor klasse av numeriske metoder for beregne tilnærminger til den deriverte.

Sekanter og tangenter

I M1 definerte vi den deriverte til en funksjon f som

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Uttrykket

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

er stigningstallet til sekanten til f mellom punktene x og $x+h$. For små h er denne sekanten en grei tilnærming til stigningstallet $f(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

På papiret er det slik at jo mindre h, desto bedre tilnærming.

Eksempel 6.6. La $f(x) = e^x$, og la $h = 0.1$. Vi beregner

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.6} - e^{1.5}}{0.1} = 4.7134.$$

Merk at

$$f'(1.5) = e^{1.5} = 4.4817,$$

så denne tilnærmingen bommer med rundt $2 \cdot 10^{-1}$. Vi kan også prøve $h = 0.01$. Da får vi

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.51} - e^{1.5}}{0.01} = 4.5042.$$

som er noe bedre, nå er feilen på rundt $2 \cdot 10^{-2}$. Vi knekker til med enda en:

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.501} - e^{1.5}}{0.001} = 4.4839,$$

og får en feil på rundt $2 \cdot 10^{-3}$. $\triangle$

Merk. Feilen i forrige eksempel er tydelig proporsjonal med h - deler du h på 10, deler du feilen på 10. En god illustrasjon av lineær feil.

Taylorutvikling

Det går an å utlede formelen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

ved å bruke taylorutviklingen til f i punktet x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots.$$

Stigningen til sekanten kan skrives

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \cdots$$

og vi ser at dette stigninstallet består av den eksakte verdien for $f'(x)$ pluss resten av taylorrekken til f

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots$$

Denne halen forteller oss noe om feilen. Dersom h er liten nok, vil h være mye større enn h^2, og vi skriver

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots = O(h)$$

for å signalisere at feilen er proporsjonal med h.

Høyere ordens tilnærminger

Vi kan relativt lett forbedre den lineære tilnærmingen fra forrige avsnitt ved å skrive

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots$$

og sette opp tilnærmingen

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \cdots$$

Feilen i denne tilnærmingen er

$$\frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \frac{f^5(x)}{5!}h^4 + \cdots$$

Hvis h er liten, er det rimelig å anta denne feilen er mye mindre enn for den første tilnærmingen, siden $h^2 << h$.

Eksempel 6.7. La $f(x) = e^x$, og la $h = 0.1$. Vi beregner

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.6} - e^{1.4}}{0.2} = 4.489162287752202,$$

som gir en feil på rundt $7.5 \cdot 10^{-3}$. Mye bedre enn i sted. Vi kan prøver også $h = 0.01$:

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.51} - e^{1.49}}{0.02} = 4.481763765529401$$

som er noe bedre, nå er feilen på rundt $7.5 \cdot 10^{-5}$. Knekker vi til med $h = 0.001$, får vi

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.501} - e^{1.499}}{0.002} = 4.481689817286139$$

som gir en feil på $7.5 \cdot 10^{-7}$. $\triangle$

Merk. Legg merke til hvordan feilen i forrige eksempel er nærmest perfekt kvadratisk - vi får to nye desimaler hver gang vi deler h på 10. Feilen deles altså på 100 når h deles på 10.

Hvis du virkelig vil slå på stortrommen, kan du bruke formelen

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

Eksempel 6.8. Vi bruker den store formelen med $h = 0.1$, $h = 0.01$ og $h = 0.001$. Då får vi feil på 10^{-5}, 10^{-9}, og 10^{-13}. Fire nye desimaler hver gang h deles på 10. Prøv selv. $\triangle$

Høyere ordens deriverte

Dersom du trenger en tilnærming for $f''(x)$, kan du bruke den andre ordens sentraldifferansen

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

Nå bør det etterhvert være klart hvordan en slik derivasjonsformel konstrueres - man søker en lineærkombinasjon av funksjonsverdier $f(x)$, $f(x-h)$ og $f(x+h)$ og lignende ledd, for å oppnå to ting:

- Korrekt tilnærming av den n-te deriverte.
- Så høy orden som mulig.

Richardsonekstrapolasjon

Det går an å kombinere tilnærminger av forskjellig orden til å oppnå høyere ordens tilnærminger. Vi definerer

$$\phi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Da har vi at

$$\phi(h) = f'(x) + h^2\frac{f'''(x)}{6} + h^4\frac{f^5(x)}{120} + \cdots$$

og

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{f'''(x)}{6} + \left(\frac{h}{2}\right)^4\frac{f^5(x)}{120} + \cdots$$

Her er trikset.

$$\frac{4\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \phi(h)}{3} = f'(x) - \left(\frac{h}{2}\right)^4\frac{f^5(x)}{480} + \cdots$$

Med andre ord: den rette lineærkombinasjonen av to estimater med forskjellige gitterfinheter kan få et (eller flere) ledd i feilutviklingen til å forsvinne, og da får vi en høyere ordens tilnærming.

Eksempel 6.9. Hvis vi setter $h = 0.1$, og tar to tidligere approksimasjoner,

$$\phi(0.1) = \frac{e^{1.6} - e^{1.4}}{0.2} = 4.489162287752202,$$

med en feil på rundt $7.5 \cdot 10^{-3}$, og

$$\phi(0.01) = \frac{e^{1.51} - e^{1.49}}{0.02} = 4.481763765529401$$

med en feil på rundt $7.5 \cdot 10^{-5}$, og og kombinerer dem, får vi

$$\frac{100\phi\left(\frac{h}{10}\right) - \phi(h)}{99} = 4.481689032981695$$

som gir en feil på $-3.73 \cdot 10^{-8} \approx \left(\frac{h}{10}\right)^4$. △

Det går an å formulere presise teoremer som forteller hvordan man skal lineærkombinere tilnærminger til høyere ordens tilnærminger, men vi nøyer oss med denne lille smakebiten.

Numerisk integrasjon

Med taylorrekker kan vi endelig analysere hvorfor midtpunktmetoden og trapesmetoden oppfører seg så forskjellig.

Fourierrekker

For mange funksjoner går det an å skrive

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

som kalles *fourierrekke*. Koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Det er ikke innlysende at det går an å skrive funksjoner på denne måten, og vi skal studere dette nærmere i senere semestre. I dette semesteret skal vi begrense oss til å vise at koeffisientene må være slik de er, og beregne noen eksempler. La $m, n \geq 1$. Det er ikke så vanskelig å vise at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx = 0$$

Vi beviser det for cosinusfunksjonene. Først skriver vi om litt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x\,dx$$

Det siste integralet er lett å beregne. Det forsvinner for alle verdier av m og n, unntatt når $m = n$, for da er

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

De to andre formlene bevises på samme måte.

Eksempel 6.10. Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n, mens b_n må beregnes. Fourierrekken blir

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$ △

Eksempel 6.11. Vi finner heavisidefunksjonen

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

sin reelle fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases}$$

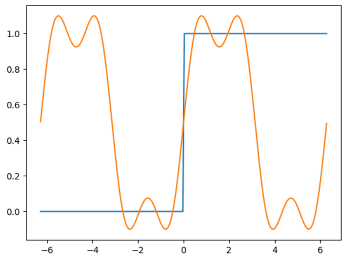
Altså kan vi skrive

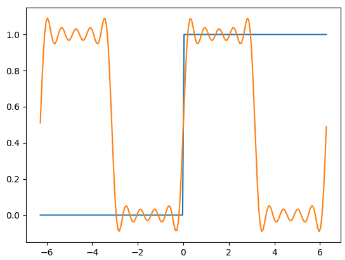
$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

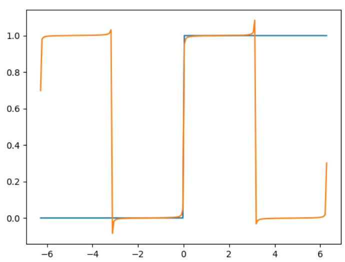
Fourierrekken konvergerer til u på intervallene $(-\pi, 0)$ og $(0, \pi)$, og til $1/2$ i $x = 0$ og $x = \pm\pi$. Partialsummer er funksjoner på formen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

Under er plot av partialsummer for $n = 2$, $n = 5$ og $n = 100$. Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet $[-\pi, \pi]$. △


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6