Kapittel 7

Differensiallikninger

De temaene vi skal berøre innen differensiallikninger, kan løst klassifiseres i tre kategorier.

Den første handler om hvorvidt en differensiallikning kan løses, og hvorvidt en eventuell løsning er entydig. Ingen av disse tingene er selvsagte.

Den andre kategorien handler teknikker for å finne analytiske løsninger, altså løsningsmetoder som kun ved penn og papir resulterer i et funksjonsuttrykk.

Den siste kategorien handler om hva vi gjør når vi ikke kan løse likningen med penn og papir. Da må vi til med numeriske metoder. Dette er det vanligste tilfellet.

Eksistens og entydighet

Differensiallikningen vi skal løse er

$$y' = f(t, y).$$

En *løsning* er en kontinuerlig deriverbar funksjon $y = y(x)$ som passer i likningen.

Eksempel 7.1. Den aller enkleste differensiallikningen er

$$y' = y.$$

Løsningen er

$$y(t) = A\exp(t). \qquad \triangle$$

Teorem 7.2. *Dersom f er lipschitzkontinuerlig, har*

$$y' = f(t, y) \quad y(0) = y_0$$

en entydig løsning.

Bevis. øving 26/27 kap 5 rudin $\square$

Analytiske metoder

Det er veldig få differensiallikninger der det er mulig å hoste opp en analytisk løsning, og man trenger det kun for å analysere noen grunnleggende situasjoner, slik som lineære kretser med spoler og kondensatorer, eller enkle modeller for varmeoverføring

Separable likninger

Eksempel 7.3. Newtons avkjølingslov $\triangle$

Integrerende faktor

Laplacetransform

Numeriske metoder

Vi skal lage numeriske metoder for å finne tilnærmede løsninger for initialverdiproblemet

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0.$$

Dette er et kjempefelt. Vi har bare tid til å skrape så vidt i overflaten, men vi skal prøve å belyse et par momenter.

Runge-Kutta-metoder

En numerisk metode for ordinære differensiallikninger starter med følgende to observasjoner:

- Vi vet hva den analytiske løsningen er i x_0. Dette vet vi på grunn av initialkravet $y(x_0) = y_0$.
- Vi vet hvilket stigningstall den analytiske løsningen har i x_0, for evaluerer vi differensialikningen i x_0, får vi $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

La oss lage oss et punkt x_1 litt ut fra x_0, med avstand $h = x_1 - x_0$. Siden vi har funksjonsverdien og stigningstallet til y i x_0, kan vi bruke lineær tilnærming, og gjette på $y(x_1)$:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y_0).$$

Nå definerer vi $y_1 = y(x_0) + hf(x_0, y_0) \approx y(x_1)$. Dette er den tilnærmede verdien til y i x_1. Vi tar den for god fisk, lager oss et nytt punkt $x_2 = x_1 + h$, og beregner

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

som er en tilnærming $y_2 \approx y(x_2)$. Nå fortsetter vi i samme stilen, gitrer opp intervallet vi skal løse likningen på med gitterfinhet h, slik at punktene er gitt ved $x_i = ih$. Tilnærmingen til $y(x_i)$ kaller vi y_i, og metoden kalles *Eulers eksplisitte metode*:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

Metoden kalles *eksplisitt*, siden likningen kommer ferdig løst for y_{i+1}.

Vi skriver nå opp et par andre varianter. Alle er basert på å bytte ut stigningen $f(x_i, y_i)$ med et eller annet estimat. Setter vi inn $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ istedet for $f(x_i, y_i)$, får vi *Eulers implisitte metode*:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

og bytter vi ut med $\frac{1}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$, får vi *trapesmetoden*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Disse to metodene kalles *implisitte* fordi likningene ikke er ferdig løst for y_{i+1}. Noen ganger er det lett å finne y_{i+1}, andre ganger ikke.

Hvis vi bytter ut $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ i trapesmetoden med en tilnærming basert på et eksplisitt eulersteg, får vi den eksplisitte *Heuns metode*:

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^*)), \end{aligned}$$

og hvis vi klinker til og bytter ut tilnærmingen til stigningstallet med følgende avanserte opplegg, får vi nok en eksplisitt variant, nemlig Runge-Kuttas klassiske fjerdeordens metode, populært kalt RK4:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \end{aligned}$$

Dette er alle metodene vi skal analysere, og alle er eksempler på *Runge-Kutta-metoder*. Nå lurer du sikkert på hvorfor man har så mange forskjellige metoder, og det korte svaret er som ellers i anvendt matematikk: noen metoder eksisterer fordi de er lette å finne opp og forstå, mens andre metoder finnes fordi de er skikkelig bra.

Eksempel 7.4. Vi løser initialverdiproblemet

$$y' = -y \quad y(0) = 1$$

med Eulers eksplisitte metode på intervallet $[0, 1]$. Siden $f(x, y) = -y$, blir metoden

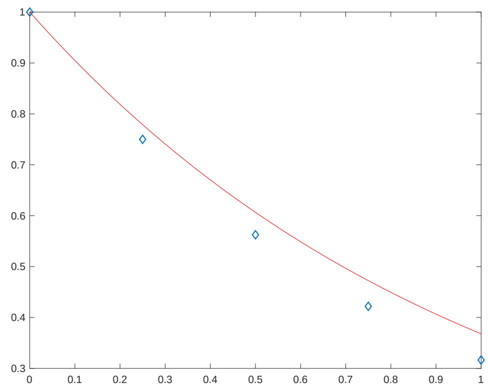
$$y_{i+1} = y_i - hy_i = (1 - h)y_i$$

med

$$y_0 = 1.$$

Løsning for $h = 0.25$ gir figuren under. De blå diamantene er y_1, y_2, y_3, y_4 og y_5, mens den røde kurven er den analytiske løsningen $y = e^{-x}$. Vi beregner $y(1) = 1/e \approx 0.367879441171442$, som kan sammenliknes med $y_5 = 0.31640625$:

$$y_5 - y(1) = -0.051473191171442. \qquad \triangle$$



Eksempel 7.5. Vi løser samme problem som i sted med Eulers implisitte metode. Metoden blir

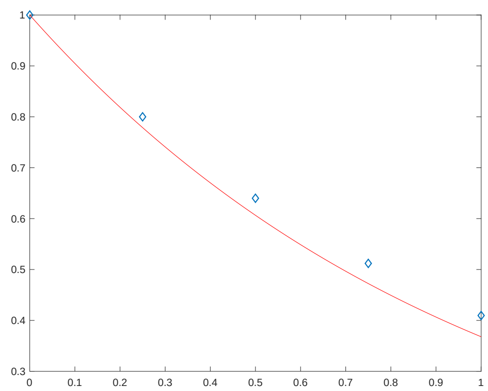
$$y_{i+1} = y_i - hy_{i+1},$$

som vi løser for y_{i+1}, og får

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{(1 + h)}.$$

Figur under for $h = 0.5$. Vi får $y_5 = 0.4096$, og

$$y_5 - y(1) = 0.041720558828558. \qquad \triangle$$



Eksempel 7.6. Trapesmetoden:

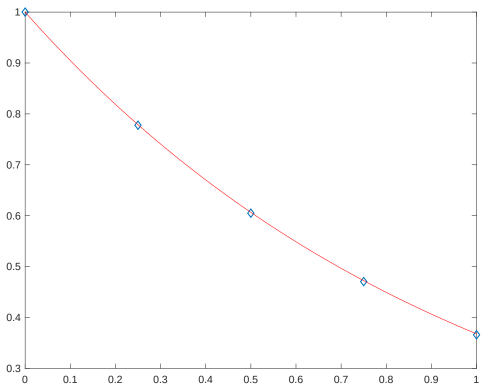
$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y_{i+1}).$$

Vi løser for y_{i+1}, og får

$$y_{i+1} = \frac{2 + h}{2 - h}y_i.$$

Denne treffer noe bedre:

$$y_5 - y(1) = -0.001929128719072. \qquad \triangle$$



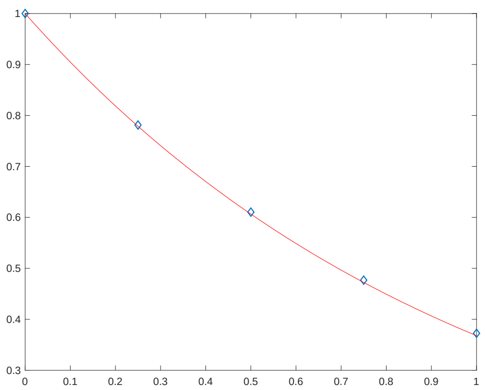
Eksempel 7.7. Heuns metode:

$$
\begin{aligned}
y_i^* &= y_i - hy_i \\
y_{i+1} &= y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y_i^*)
\end{aligned}
$$

og

$$y_5 - y(1) = 0.004649588674749.$$

Bedre enn Euler, men ikke helt trapesmetoden. △



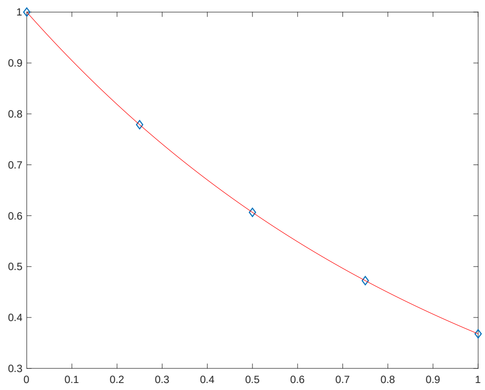
Eksempel 7.8. Til slutt RK4:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -y_i \\
k_2 &= -\left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= -\left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= -(y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
\end{aligned}
$$

Denne treffer ganske bra:

$$y_5 - y(1) = 1.475823530627807e - 05.$$

Noe må den ha igjen for å være så komplisert. △



Utledningsmetoder

I forrige avsnitt utledet vi Eulers eksplisitte metode. For å sette disse metodene i kontekst med tidligere pensum i kurset, og for å indikere hvordan man kan lage flere metoder, skal vi utlede noen av dem med kjente metoder for numerisk integrasjon og derivasjon.

En uledningsteknikk er å gitre opp med $h = x_{i+1} - x_i$, integrere differensiallikningen

$$
\begin{aligned}
y(x_{i+1}) - y(x_i) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx,
\end{aligned}
$$

bruke $y_{i+1} - y_i \approx y(x_{i+1}) - y(x_i)$ på venstre side, og tilnærme integralet

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

med en kvadraturregel. Gjør man den særdeles enkle tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx. \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\,dx = hf(x_i, y_i),$$

får man eksplisitt Euler, og velger man den tilsvarende enkle tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \approx hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

får man Eulers implisitte metode. Trapesregelen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

gir trapesmetoden

$$y_{i+1} = y(x_i) + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Tilnærmer man trapesregelen med formelen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)\right)$$

der $y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ er et eksplisitt eulersteg, får man Heuns metode. Bruker man tilnærmingen

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx \approx hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

får man *midtpunktmetoden*.

RK4 er avledet fra Simpsons metode. Tilnærmer man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx,$$

med Simpson, får man en implisitt metode som ikke er pensum, og bytter man ut de implisitte verdiene leddene i denne metoden med forskjellige estimater basert på eksplisitt Euler, får man RK4, litt som Heuns metode er avledet fra trapesmetoden.

Metodene vi har utledet til nå, kalles *enstegsmetoder*, for kun y_{i+1} og y_i figurerer i likningene. Grunnen til at alle metodene er på denne formen, er at det kun er brukt en type endelig differansetilnærming på venstre side av

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

nemlig den første ordens differansen

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Nå er det ingenting i veien for å bruke en høyere ordens tilnærming, for eksempel sentraldifferansen

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Setter man denne inn for y', får man *leap-frog-metoden*

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Her inngår både y_{i+1}, y_i og y_{i-1}, og leap-frog er et eksempel på en *flerstegsmetode*. Flerstegsmetoder er ikke pensum i dette kurset.

Feilanalyse

I dette avsnittet skal vi ta en titt på hvorfor metodene treffer så foreskjellig. Vi skal indikere hvordan analysen får for eksplisitt Euler, og så skrive opp resultatet for de andre metodene.

Lineariseringen som gir det første eulersteget er

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \\ &\approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) \\ &= y(x_0) + hy'(x_0). \end{aligned}$$

Vi antar at y er en analytisk funksjon, og taylorutvikler:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \\ &= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \cdots \end{aligned}$$

Sammenlikner vi denne med

$$y_1 = y(x_0) + hy'(x_0),$$

ser vi at feilen i det første eulersteget er gitt ved

$$y(x_1) - y_1 = \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}h^3 + \cdots$$

altså taylorrekkehalen til y. Hvis vi antar at h er liten, slik at h^2 er mye større enn h^3, og leddet

$$\frac{y''(x_0)}{2}h^2$$

dominerer halen på taylorrekken, er det ikke urimelig å hevde at eksplisitt Euler har *lokal feil* av størrelsesorden h^2.

Feilen etter ett steg er altså av størrelsesorden h^2. Men hva er feilen etter n steg? I eksemplene i forrige avsnitt, kjørte vi løserne på intervallet $[0, 1]$. La oss si at vi kjører på intervallet $[x_0, x_0 + a]$. Vi velger h slik at

$$x_n = x_0 + hn = x_0 + a$$

og

$$n = \frac{a}{h}.$$

Hvis vi nå gjør n steg med eksplisitt Euler, samler vi i hvert steg opp en lokal feil omtrent lik

$$\frac{y''(x_i)}{2}h^2.$$

Feilen etter n steg blir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y''(x_i)}{2}h^2,$$

og hvis vi antar at $y'' \leq M$ på $[x_0, x_0 + a]$, er det rimelig å hevde at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y''(x_i)}{2}h^2 \leq Mnh^2 = M\frac{a}{h}h^2 = Mah.$$

Vi sier derfor at eulers metode har *global feil* av størrelsesorden h.

Teorem 7.9. *Lokal og global feil for metodene:*

Metode	*Lokal feil*	*Global feil*
Eksplisitt Euler	h^2	h
Implisitt Euler	h^2	h
Trapesmetoden	h^3	h^2
Heuns metode	h^3	h^2
RK4	h^5	h^4

Vi skal ikke bevise dette teoremet, men nevner at bevisteknikken er den samme for alle metodene: taylorutvikle om x_0 for å finne lokal feil, og så se på hva som skjer etter n steg. Dette teoremet forklarer langt på vei hva som skjedde i eksemplene i forrige avsnitt. Nå tar vi et par eksempler der vi lar $h \to 0$.

Eksempel 7.10. Vi kjører samme eksempel som i forrige avsnitt, men nå bruker vi Eulers eksplisitte metode for $h = 0.1$, $h = 0.01$ og så videre. Resultatene er oppsummert i følgende tabell:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$-1.920100107144218e-02$
10^{-2}	$-1.847099898213078e-03$
10^{-3}	$-1.840164004788258e-04$
10^{-4}	$-1.839473847314865e-05$
10^{-5}	$-1.839403194148215e-06$

Dette eksemplet demonstrerer tydelig at feilen etter n steg er proporsjonal med h. På folkemunne sier man gjerne at man får en ekstra korrekt desimal hver gang man tideler h. Eulers implisitte metode oppfører seg omtrent likt, så den hopper vi over. $\triangle$

Eksempel 7.11. Trapesmetoden for $h = 0.1$, $h = 0.01$ og så videre:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$-3.068987885734287e-04$
10^{-2}	$-3.065695217463471e-06$
10^{-3}	$-3.065658332745969e-08$
10^{-4}	$-3.069314802317535e-10$
10^{-5}	$-5.472844399889709e-12$

Her er feilen etter n steg proporsjonal med h^2. På folkemunne sier man gjerne at man får to desimaler hver gang man tideler h. Heuns metode produserer omtrent den samme tabellen. $\triangle$

Eksempel 7.12. RK4:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$3.332410560830112e-07$
10^{-2}	$3.091293887536040e-11$
10^{-3}	$3.996802888650564e-15$
10^{-4}	$2.664535259100376e-15$
10^{-5}	$-3.330669073875470e-15$

Hva skjedde her? Feilen etter n steg proporsjonal med h^4, altså fire desimaler for hver tideling av h, men bare for de første tre tidelingene. Når $h = 10^{-3}$ har vi nådd såkalt *maskinpresisjon*. Matlab regner bare med 16 desimaler, og dette setter en stopper for konvergensen. $\triangle$

Eksempel 7.13. RK4, men nå har matlab fått beskjed om å regne med 32 desimaler:

h	$y_n - y(1)$
10^{-1}	$3.332410561118064e-07$
10^{-2}	$3.091319001284922e-11$
10^{-3}	$3.068217823302200e-15$
10^{-4}	$3.065917492545278e-19$
10^{-5}	$3.065687557054922e-23$

Tabellene til nå har tatt en brøkdel av et sekund å produsere. Til sammenlikning tok denne her rundt ti minutter, pluss noen timer knoting for å finne ut av hvordan matlab skal regne riktig med 32 desimaler. Presisjon koster! $\triangle$