

# Kapittel 15

## Andre halvdel av TMA4107

I dette kapitlet skal vi ta for oss en generalisering av skalarproduktet du lærte om på gymnaset.

### Vektorrom

Et *vektorrom*  $V$  er en mengde som er lukket under operasjonene vi bruker for å sette sammen lineærkombinasjoner, nemlig addisjon og skalarmultiplikasjon. Dersom  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  og  $c \in \mathbb{C}$ , er

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$$

og

$$c\mathbf{v} \in V.$$

I tillegg skal følgende aksiomer være tilfredsstillt. Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

og kommutativ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Det skal finnes et element kalt  $\mathbf{0}$  som gjør ingenting

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v},$$

og hvert element  $\mathbf{v}$  skal ha en additiv invers, altså et element  $\mathbf{w}$  slik at

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + (a + b)\mathbf{v}$$

og vektorer

$$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}.$$

Vi må også kreve at

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Du kjenner til mange vektorrom. Vi har bare ikke kalt det vektorrom før.

**Eksempel 15.1.**  $\mathbb{R}^n$  og  $\mathbb{C}^n$  og er klassiske eksempler på vektorrom.  $\triangle$

**Eksempel 15.2.** Alle polynomer av maksimal orden  $n$  utgjør et vektorrom.  $\triangle$

**Eksempel 15.3.** Alle kontinuerlige funksjoner utgjør et vektorrom.  $\triangle$

### Lineærtransformasjoner

#### Indreproduktrom

Et *indreprodukt* er noe der du putter inn to vektorer og får ut et tall. Vi skriver gjerne

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

og følgende aksiomer skal gjelde. Indreproduktet er symmetrisk

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

lineært i begge argumenter

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

og ikke null om du ganger en vektor med seg selv

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

#### Projeksjon

En projeksjon er en lineærtransformasjon  $P$  som tilfredsstiller

$$P\mathbf{x} = P^2\mathbf{x}.$$

for alle  $\mathbf{x}$ . Denne ligningen sier at intet nytt skjer om du benytter lineærtransformasjonen for andre gang, og man kan tenke at  $P\mathbf{x}$  er skyggen  $\mathbf{x}$  kaster dersom man lyser på  $\mathbf{x}$  med en lommelykt. Vi skal begrense oss til å studere ortogonale projeksjoner. Dette betyr at lommelykten står slik at  $\mathbf{x}$  og  $P\mathbf{x}$  danner en rettvinklet trekant.

#### Ortogonal projeksjon i $\mathbb{R}^2$

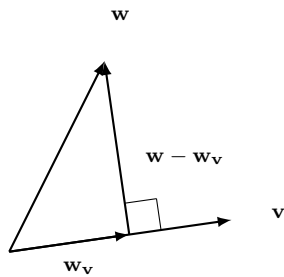
Du husker skalarproduktet fra gymnaset. Du har lært to måter å beregne skalarproduktet, nemlig

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta,$$

der  $\theta$  er vinkelen mellom  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$ , og

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2.$$

Vi bruker skalarproduktet til å projisere vektorer ortogonalt på hverandre. Det sentrale spørsmålet er: hvordan kan vi skrive vektoren  $\mathbf{w}_v$  i figuren under?



Hva er projeksjon?

Vi kan utlede en formel for lengden:

$$\|\mathbf{w}_v\| = \|\mathbf{w}\| \cos \theta = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{w}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|},$$

slik at

$$\mathbf{w}_v = \|\mathbf{w}_v\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Denne vektoren kalles gjerne  $\mathbf{w}$  sin komponent i retningen gitt av  $\mathbf{v}$ , eller  $\mathbf{w}$  sin projeksjon på  $\mathbf{v}$ . Komponenten til  $\mathbf{w}$  ortogonalt på  $\mathbf{v}$  er

**Eksempel 15.4.** Vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sin komponent i retningen gitt av

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er:

$$\mathbf{w}_v = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VI kan også beregne lengden  $\mathbf{w} - \mathbf{w}_v$ :

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}_v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \triangle$$

## Adjungering

Før vi kan generalisere projeksjon til  $\mathbb{C}^n$ , må vi utvide transponeringsoperasjonen litt.

**Definisjon.** La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

være en kompleks  $m \times n$ -matrise. Den *adjungerte* av  $A$  er  $n \times m$ -matrisen

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

der radene og kolonnene i  $A$  er byttet om, og alt er komplekskonjugert.  $\triangle$

**Merk.** Å adjungere en reell matrise er det samme som å transponere den.

**Eksempel 15.5.** Hvis vi lar  $A$  være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5i & 0 & -2i \\ 3 & i & 4 \end{bmatrix},$$

så er den adjungerte av  $A^*$  gitt ved:

$$A^* = \begin{bmatrix} -5i & 3 \\ 0 & -i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis vi adjungerer denne matrisen igjen, så kommer vi tilbake til utgangspunktet:

$$(A^*)^* = A \quad \triangle$$

Vi tar med noen regneregler for adjungering.

**Teorem 15.6.** For enhver matrise  $A$  har vi at å adjungere to ganger gir den opprinnelige matrisen:

$$(A^*)^* = A$$

Hvis  $A$  og  $B$  er matriser slik at produktet  $AB$  er definert, så er den adjungerte av produktet lik produktet av de adjungerte, i motsatt rekkefølge:

$$(AB)^* = B^* A^*$$

## Indre- og ytreprodukt

La  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  være kolonnevektorer i  $\mathbb{C}^n$ . *Indreproduktet* mellom dem er definert som:

$$\mathbf{v}^* \mathbf{w} = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2 + \cdots + \bar{v}_n w_n$$

*Ytreproduktet* er:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \mathbf{v}^* &= \begin{bmatrix} w_1 \bar{v}_1 & w_1 \bar{v}_2 & \cdots & w_1 \bar{v}_n \\ w_2 \bar{v}_1 & w_2 \bar{v}_2 & \cdots & w_2 \bar{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n \bar{v}_1 & w_n \bar{v}_2 & \cdots & w_n \bar{v}_n \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{w} \bar{v}_1 \quad \mathbf{w} \bar{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w} \bar{v}_n] \end{aligned}$$

Vi har definert indre- og ytreprodukt for kolonnevektorer. Det er ikke noe problem å sette opp tilsvarende definisjoner for rekkevektorer, men det skal vi ikke plage dere med. Vi definerer *lengden* til en vektor  $\mathbf{v}$  som

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^* \mathbf{v}},$$

og vi sier at  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er *ortogonale* dersom

$$\mathbf{v}^* \mathbf{w} = \mathbf{w}^* \mathbf{v} = 0.$$

**Merk.** Dersom  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er reelle, blir indreproduktet

$$\mathbf{v}^* \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

slik du er vant til fra gymnaset. Resultatet av dette produktet er en skalar, og det er derfor man gjerne kaller det skalarproduktet.

**Merk.**  $\mathbf{v}^* \mathbf{v}$  består av de kvadrerte absoluttverdiene til komponentene til  $\mathbf{v}$ .

**Merk.** Ytreproduktet  $\mathbf{w} \mathbf{v}^*$  er en ikke inverterbar matrise, siden alle kolonnene er parallelle.

**Eksempel 15.7.** I  $\mathbb{R}^2$  er  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  ortogonale dersom vinkelen mellom dem er  $\pi/2$ .  $\triangle$

**Eksempel 15.8.** Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonale.  $\triangle$

**Eksempel 15.9.** Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonale.  $\triangle$

**Eksempel 15.10.** Vektoren  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$  har lengde 1 for alle  $\mathbf{w} \neq 0$ .  $\triangle$

Vi tar med noen regneregler for indre- og ytreprodukt. Disse er lette å utlede, så vi dropper bevisene.

**Teorem 15.11.** *Indreproduktet tilfredsstiller følgende regneregler:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* \mathbf{w} &= \overline{\mathbf{w}^* \mathbf{v}} \\ (c\mathbf{v})^* \mathbf{w} &= \bar{c}(\mathbf{v}^* \mathbf{w}) = \mathbf{v}^*(\bar{c}\mathbf{w}) \\ (\mathbf{v} + \mathbf{u})^* \mathbf{w} &= \mathbf{v}^* \mathbf{w} + \mathbf{u}^* \mathbf{w} \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{w} + \mathbf{u}) &= \mathbf{v}^* \mathbf{w} + \mathbf{v}^* \mathbf{u} \end{aligned}$$

Det neste på posten er Pytagoras' teorem.

**Teorem 15.12.** *Dersom vektorene  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er ortogonale, er*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2.$$

*Bevis.* Vi vet at

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{w})^*(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v}^* \mathbf{v} - \mathbf{v}^* \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \mathbf{v} + \mathbf{w}^* \mathbf{w} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{v}^* \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \mathbf{v} + \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned}$$

siden  $\mathbf{v}^* \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \mathbf{v} = 0$ . siden  $\mathbf{v}^* \mathbf{w} = 0$  og  $\mathbf{w}^* \mathbf{v} = 0$ .  $\square$

### Projeksjon i $\mathbb{C}^n$

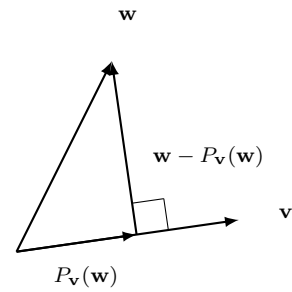
En naturlig generalisering av projeksjon på  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  er lineærtransformasjonen

$$P_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}.$$

Assosiativiteten til matrisemultiplikasjon gir at vi kan skrive

$$P_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \mathbf{w} = \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{w}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{w}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

så likheten med projeksjon i  $\mathbb{R}^2$  er slående.



Hva er projeksjon?

**Eksempel 15.13.** La oss projisere vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5i \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix}$$

både på og normalt på

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner:

$$\mathbf{v}^* \mathbf{v} = 3 \cdot 3 + i \cdot (-i) + 4 \cdot 4 = 26$$

og

$$\mathbf{v}^* \mathbf{w} = 3 \cdot (-5i) + i \cdot 0 + 4 \cdot 2i = -7i$$

slik at

$$P_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{w}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{-7i}{26} \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 4 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{w}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} -5i \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix} - \frac{-7i}{26} \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} -109i \\ 7 \\ 80i \end{bmatrix} \triangle \end{aligned}$$

### Mer om ortogonalitet

**Definisjon.** En *ortogonal mengde* er en mengde vektorer  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , slik at

$$\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_k = 0$$

for alle vektorer  $\mathbf{u}_i$  og  $\mathbf{u}_k$  i mengden. Dersom i tillegg  $\|\mathbf{u}_j\| = 1$  for alle vektorene, sier vi at mengden er *ortonormal*.

**Eksempel 15.14.** Standardbasen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  for  $\mathbb{C}^n$  er en ortogonal mengde.  $\triangle$

**Definisjon.** Dersom en ortogonal mengde  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  spenner ut et rom  $V$ , sier vi at mengden er en *ortogonal basis* for  $V$ .

**Definisjon.** Det er vanlig å sette opp  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  som kolonner i en matrise  $U$ . Vi sier da at  $U$  er en *ortogonal matrise*.

Hvis vi har en ortogonal basis for et rom, er det veldig lett å finne en vektors komponenter i rommet. La oss si at vi ønsker å finne vektoren  $\mathbf{v}$  sine komponenter i basisen  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ . Komponentene til  $\mathbf{v}$  er gitt ved likningen

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n = U\mathbf{x}$$

Hvis vi ganger begge sider av denne likningen med  $U^*$ , får vi

$$U^* \mathbf{v} = U^* U \mathbf{x},$$

og siden kolonnene til  $U$  er ortogonale, blir den kvadratiske matrisen  $U^* U$  diagonal:

$$U^* U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_3^* \mathbf{u}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Følgelig er løsningen av systemet  $U^* \mathbf{v} = U^* U \mathbf{x}$  enkel å skrive opp.

**Teorem 15.15.** La  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  være en ortogonal basis for  $V$ , og la  $\mathbf{v} \in V$ . I så fall kan  $\mathbf{v}$  skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= P_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v} + P_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v} + \dots + P_{\mathbf{u}_n} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{u}_n^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Vi kan også projisere en vektor ned i et rom der den ikke hører hjemme. Prosjeksjonen minimerer avstanden fra rommet til vektoren.

**Teorem 15.16.** La  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  være en ortogonal basis for  $V$ , og la  $\mathbf{v} \notin V$ . Punktet

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= P_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v} + P_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v} + \dots + P_{\mathbf{u}_n} \mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{u}_n^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

er det punktet i  $V$  som har kortest avstand til  $\mathbf{v}$ :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w} \in V} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

*Bevis.* Vi må først bevise at  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$  står ortogonalt på  $V$ . Rommet  $V$  er utspent av  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ . Vi sjekker at  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$  står ortogonalt på hver  $\mathbf{u}_j$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^* \mathbf{u}_j &= \mathbf{v}^* \mathbf{u}_j - (\mathbf{v}')^* \mathbf{u}_j \\ &= \mathbf{v}^* \mathbf{u}_j - \mathbf{v}^* \mathbf{u}_j = 0 \end{aligned}$$

Dersom  $\mathbf{w} \in V$ , ligger også  $\mathbf{w} - \mathbf{v}'$  i  $V$ , og da står  $\mathbf{w} - \mathbf{v}'$  og  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$  ortogonalt på hverandre. Pytagoras' teorem gir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= \|\mathbf{v} - \mathbf{v}' - (\mathbf{w} - \mathbf{v}')\|^2 \\ &= \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}'\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2, \end{aligned}$$

for alle  $\mathbf{w} \in V$ , slik at

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|,$$

og

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w} \in V} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|. \quad \square$$

## Gram-Schmidts metode

La  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  være en lineært uavhengig vektormengde. Vi skal lage oss en ortogonal basis  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  for rommet utspent av vektorene i mengden. Vi begynner med å definere

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

Vektoren  $\mathbf{v}_2$  er ikke nødvendigvis ortogonal på  $\mathbf{u}_1$ , men

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1$$

er. Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3 \\ &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

er ortogonal på både  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$ . De tre vektorene  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  og  $\mathbf{u}_3$  spenner ut det samme rommet som  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$ . Nå kan vi fortsette slik, og definere rekursivt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_j} \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_j^* \mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_j} \mathbf{u}_j. \end{aligned}$$

**Teorem 15.17.** Mengden  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  er en ortogonal basis for rommet utspent av  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

*Bevis.* Vi bruker induksjon. Det er lett å se at  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  er ortogonale:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1^* (\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1) \\ &= \mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1^* \mathbf{v}_2 = 0 \end{aligned}$$

Siden  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  er ikketrivielle lineærkombinasjoner av de lineært uavhengige vektorene  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$ , er det åpenbart at  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  spenner ut det samme rommet som  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$ .

La nå

$$V_k = \text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Vi antar at  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$  er en ortogonal basis for  $V_{k-1}$ . Vi må vise at  $\mathbf{u}_k$  står ortogonalt på  $V_{k-1}$ , og at  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  spenner ut  $V_k$ . Vi sjekker indreproduktet av  $\mathbf{u}_j$  med  $\mathbf{u}_k$ . Siden  $\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_m = 0$  når  $j \neq m$ , får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_j^* (\mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_m^* \mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_m^* \mathbf{u}_m} \mathbf{u}_m) \\ &= \mathbf{u}_j^* \mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_m^* \mathbf{v}_k}{\mathbf{u}_m^* \mathbf{u}_m} \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_m \\ &= \mathbf{u}_j^* \mathbf{v}_k - \mathbf{u}_j^* \mathbf{v}_k = 0. \end{aligned}$$

Vi ser altså at  $\mathbf{u}_k$  står ortogonalt på alle  $\mathbf{u}_j$ , og siden  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$  er en ortogonal basis for  $V_{k-1}$ , står  $\mathbf{u}_k$  ortogonalt på  $V_{k-1}$ . Siden  $\mathbf{v}_k$  er lineært uavhengig av  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ , og  $\mathbf{u}_k$  er en lineærkombinasjon av  $V_k$  og  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ , spenner  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  ut  $V_k$ .  $\square$

## Minste kvadraters metode

Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til systemer med flere likninger enn ukjente. La oss si at  $A$  er en  $m \times n$ -matrise,  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{b}$  er kolonnevektorer i  $\mathbb{C}^n$ , og at vi ønsker å betrakte systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

for  $m > n$ . Dette systemet vil ikke ha noen løsning med mindre  $\mathbf{b}$  tilfeldigvis ligger i kolonnerommet til  $A$ , så vi ønsker istedet å finne den  $\mathbf{x}$  som minimerer avstanden fra  $A\mathbf{x}$  til  $\mathbf{b}$ . Hvis vi krever at vektoren  $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  står ortogonalt på kolonnerommet til  $A$ , oppnår vi dette. Altså må vi ha

$$A^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

eller

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette er et  $n \times n$ -system som kalles normalligningene. Løsningen av systemet gir den  $\mathbf{x}$  som minimerer avstanden fra  $A\mathbf{x}$  til  $\mathbf{b}$ .

**Eksempel 15.18.** Vi ønsker å bruke minste kvadrats metode på systemet med totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1-i \\ i & i & 1+i \\ 0 & i & i \end{array} \right]$$

Vi ganger matrisen på venstre side av ligningssystemet med sin adjungerte

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{array} \right]$$

og får

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right].$$

Vi ganger høyresiden med den adjungerte av venstresiden, og får

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1-i \\ 1+i \\ i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1-i \\ 3-2i \end{array} \right]$$

Løsningen av systemet med totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 3 & 3-2i \end{array} \right]$$

er

$$\left[ \begin{array}{c} -i/2 \\ 1-i/2 \end{array} \right].$$

Dette betyr at vektoren

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} -i/2 \\ 1-i/2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1-i/2 \\ 3/2+i \\ 1/2+i \end{array} \right]$$

er det punktet i kolonnerommet til matrisen

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{array} \right]$$

som minimerer avstanden til punktet

$$\left[ \begin{array}{c} 1-i \\ 1+i \\ i \end{array} \right] \quad \triangle$$

## Litt om polynominterpolasjon

Hvis du har  $n + 1$  punkter  $(x_i, y_i)$  i  $\mathbb{R}^2$ , der  $x_i$  er forskjellig for alle punkter, vil det generelt være mulig å finne et reelt polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_i) = y_i$$

for alle  $1 \leq i \leq n + 1$ . Dette kalles *interpolasjon*. Likningene over utgjør et  $(n + 1) \times (n + 1)$ -likningssystem for koeffisientene  $a_i$  med totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array} \right]$$

Det kan vises at dette ligningssystemet alltid har entydig løsning så lenge  $x_j \neq x_k$  for  $j \neq k$ , men det skal vi ikke gjøre. Det følger at du alltid kan interpolere  $n + 1$  punkter med et polynom av orden  $n$  på en entydig måte.

**Eksempel 15.19.** Vi prøver å finne et annengrads-polynom som går gjennom punktene

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] \quad \text{og} \quad \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right].$$

Et annengrads-polynom skrives  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , så likningssystemet blir

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Løsningen er  $a = 1$ ,  $b = -2$  og  $c = 1$ , slik at polynomet blir  $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ . Det er lett å sjekke at polynomet tar de rette verdiene i  $x = 0$ ,  $x = 1$  og  $x = 2$ .  $\triangle$

Dersom man prøver å gjøre den samme prosessen med et polynom som har orden  $m < n$ , vil man få det overbestemte  $(n + 1) \times (m + 1)$ -systemet

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} x_1^m & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^m & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^m & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array} \right]$$

Bruker man så minste kvadrats metode på dette systemet, får man et polynom som passer ganske bra til punktene uten at grafen går gjennom hvert enkelt punkt - dette kalles *regresjon*.

**Eksempel 15.20.** Vi prøver å finne et annengrads-polynom som går gjennom punktene

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] \quad \text{og} \quad \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right].$$

Likningssystemet blir nå

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Dette systemet har ingen løsning, men vi kan bruke minste kvadrats metode. Matrisen er:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

mens høyresiden  $\mathbf{b}$  er:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Den adjungerte  $A^*$  er:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger  $A^*$  med  $A$  og  $\mathbf{b}$ , og får

$$A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 3 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi må løse systemet  $A^*A = A^*\mathbf{b}$ , altså systemet med totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 22 \\ 36 & 14 & 3 & 8 \\ 14 & 6 & 4 & 3 \end{array} \right].$$

Løsningen er

$$\begin{bmatrix} 0.27710843 \\ -0.13855422 \\ -0.01204819 \end{bmatrix}$$

slik at polynomet blir

$$p(x) = 0.27710843x^2 - 0.13855422x - 0.01204819. \quad \triangle$$

## Fourieranalyse

### Komplekse funksjoner av en reell variabel

I M1 og M2 var alle funksjoner reelle. I M3 begynte vi så smått med komplekse funksjoner av en reell variabel når vi løste systemer av differensiallikninger. I dette kapitlet skal vi fortsette med det.

En *kompleks funksjon av en reell variabel* er en funksjon

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Man kan tenke på  $f$  som en parametrisering av en kurve i det komplekse planet.

### Eksempel 15.21. Funksjonen

$$f(x) = (1+i)x \quad t \geq 0$$

beskriver en rett linje i første kvadrant i det komplekse planet.  $\triangle$

**Eksempel 15.22.** Fra M3 husker du kanskje Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Denne funksjonen kalles en *kompleks eksponensial-funksjon*. Merk at funksjonsverdiene ligger på enhets-sirkelen i det komplekse planet, og funksjonen kan betraktes som en parametrisering av denne.  $\triangle$

I mange tilfeller er det gunstig å skrive en reell funksjon som en kompleks funksjon.

**Eksempel 15.23.** Dersom vi erstatter  $x$  med  $-x$  i Eulers formel, får vi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Disse to likningene kan kombineres til

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Med andre ord: om vi har en funksjon som involverer sinus- og cosinusfunksjoner, kan den like gjerne skrives med komplekse eksponensialfunksjoner.  $\triangle$

Sinus- og cosinusfunksjoner har du jobbet med siden gymnasen, og derfor er de intuitive å jobbe med, og dessuten er de lette å visualisere. Komplekse eksponensialfunksjoner er vanskeligere å se for seg, men ofte mer praktiske i bruk. Noen beviser blir veldig hårete på reell form, og fouriertransform, som kommer i neste kapittel, er praktisk talt umulig å forstå uten komplekse eksponensialfunksjoner.

### Periodiske funksjoner

Når man skal forstå fourierrekker er det ikke mulig å komme utenom periodiske funksjoner. En funksjon sies å ha *periode*  $p > 0$  dersom

$$f(x+p) = f(x) \quad (15.1)$$

for alle  $x$  i definisjonsmengden til  $f$ . Den minste  $p$  slik at (15.1) holder, kalles *fundamentalperioden* til  $f$ .

**Eksempel 15.24.** La

$$f(x) = \sin x$$

Denne funksjonen har perioder  $2n\pi$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Fundamentalperioden er  $2\pi$ .  $\triangle$

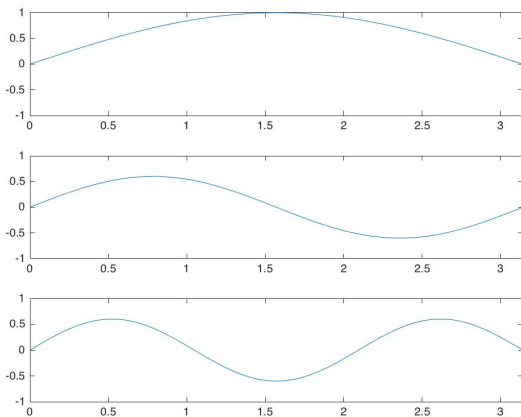
Dersom  $f$  har periode  $p$ , og  $g(x) = f(kx)$ , har  $g$  periode  $p/k$ , for

$$\begin{aligned} g(x) &= f(kx) = f(kx+p) \\ &= f(k(x+p/k)) = g(x+p/k). \end{aligned}$$

**Eksempel 15.25.** La

$$f(x) = \sin(3x)$$

Denne funksjonen har perioder  $2n\pi/3$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ . Fundamentalperioden er  $2\pi/3$ . Under er plot av funksjonene  $\sin x$ ,  $\sin 2x$  og  $\sin 3x$ .  $\triangle$



**Eksempel 15.26.** Den komplekse eksponensialfunksjonen  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  også åpenbart fundamentalperiode  $2\pi$ .  $\triangle$

**Ortogonal systemer**

La  $f$  og  $g$  være komplekse funksjoner av en reell variabel på intervallet  $[a, b]$ . Integralet

$$\int_a^b f \bar{g} dx$$

er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, og har alle de samme egenskapene. Vi sier at  $f$  og  $g$  er *ortogonale* på  $[a, b]$  dersom

$$\int_a^b f \bar{g} dx = 0.$$

Et *ortogonalt system*  $\{\phi_n\}$  er familie av funksjoner  $\phi_n$  som er innbyrdes ortogonale. Merk at siden  $f \bar{f} = |f|^2 \geq 0$ , er

$$\int_a^b f \bar{f} dx \geq 0,$$

og den eneste funksjonen som tilfredsstiller

$$\int_a^b f \bar{f} dx = 0$$

er  $f = 0$ . På samme vis som  $\int_a^b f \bar{g} dx$  er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, er

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f \bar{f} dx}$$

en generalisering av lengden til en vektor.

Dersom en familie  $\{\phi_n\}$  av funksjoner er innbyrdes ortogonale, sier vi at  $\{\phi_n\}$  er et *ortogonalt system*, og dersom de tilfredsstiller

$$\int_a^b \phi_n \bar{\phi}_m dx = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

sier vi at familien er *ortonormal*.

**Eksempel 15.27.** De komplekse eksponensialfunksjonene

$$e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

utgjør et ortogonalt system på intervallet  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases} \quad \triangle$$

**Eksempel 15.28.** Funksjonene

$$\frac{1}{2\pi} e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

er et ortonormalt system på intervallet  $[-\pi, \pi]$ .  $\triangle$

Dersom  $f$  og  $g$  er reelle, blir  $f = \bar{f}$  og  $g = \bar{g}$ , slik at indreproduktet kan skrives

$$\int_a^b f g dx.$$

Reelle funksjoner kan også danne ortogonale systemer.

**Eksempel 15.29.** La  $m, n \geq 1$ . Siden

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

utgjør  $\{\sin nx, \cos mx\}$  også et ortogonalt system på  $[-\pi, \pi]$ . Det er ikke så vanskelig å se at disse er ortogonale. Vi beviser det for cosinusfunksjonene. Først skriver vi om litt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x dx & \end{aligned}$$

Det siste integralet er lett å beregne. Det forsvinner for alle verdier av  $m$  og  $n$ , unntatt når  $m = n$ , for da er

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

De to andre formelene bevises på samme måte.  $\triangle$

**Eksempel 15.30.** Legendrepolynomene er en familie av polynomer gitt ved rekursjonen

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \end{aligned}$$

og er et ortogonalt system på intervallet  $[-1, 1]$ . De første fem polynomene er:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

Vi skal ikke ha bruk for legendrepolynomene i dette kapitlet, men vi skal møte dem igjen i kapitlene om interpolasjon og numerisk integrasjon. Legendrepolynomene dukker opp i mange sammenhenger, både i matematikken og i andre fagfelt. Det kanskje mest kjente eksemplet utenfor matematikken, er Schrødingers likning for hydrogenatomet, der disse dukker opp i familien av løsninger.  $\triangle$

Dersom en funksjon kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjoner i et ortogonalt system, er det lett å utlede formler for koeffisientene i lineærkombinasjonen.

**Teorem 15.31.** Dersom  $\{\phi_n\}$  er et ortonormalt system på  $[a, b]$ , og

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

er

$$c_n = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

*Bevis.* Vi ganger  $f$  med  $\overline{\phi_m}$ :

$$f(x) \overline{\phi_m} = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \overline{\phi_m},$$

integrerer

$$\int_a^b f(x) \overline{\phi_m} dx = \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} dx,$$

og bruker ortogonaliteten:

$$\int_a^b f(x) e^{-imx} dx = c_m. \quad \square$$

Koeffisientene  $c_n$  kalles *fourierkoeffisientene*. De har følgende artige egenskap dersom vi begrenser oss til funksjoner som tilfredsstillers  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ .

**Teorem 15.32.** Dersom

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

er

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

*Bevis.* Vi ganger nå  $f$  med  $\overline{f}$ :

$$f \overline{f} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n \overline{c_m} \phi_n \overline{\phi_m},$$

integrerer

$$\int_a^b f \overline{f} dx = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n \overline{c_m} \int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} dx,$$

og bruker igjen ortogonaliteten:

$$\int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx = \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}. \quad \square$$

Dersom  $f$  ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjonene  $\phi_n$ , kan vi projisere  $f$  ned i rommet spent ut disse funksjonene. Lineærkombinasjonen med fourierkoeffisientene som vektor er den beste approksimasjonen til  $f$  i rommet utspent av  $\phi_n$ , så lenge vi måler kvaliteten med funksjonsnormen definert ovenfor.

**Teorem 15.33.** Dersom

$$h(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

og

$$g(x) = \sum_{n=1}^N d_n \phi_n(x),$$

er

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$$

*Bevis.* Denne beregningen er litt hårete, men du finner nok ut av det med penn og papir:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx = \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx &- \sum_{n=1}^N c_n \overline{d_n} - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} d_n + \sum_{n=1}^N d_n \overline{d_n} = \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx &- \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n} + \sum_{n=1}^N |c_n - d_n|^2. \end{aligned}$$



Det siste uttrykket er helt klart minimert dersom man velger  $d_n = c_n$ .  $\square$

Det neste teoremet kalles gjerne *Bessels ulikhet*, ihvertfall dersom  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorem 15.34.** Dersom

$$h(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

er

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

*Bevis.* Fra forrige bevis vet vi at

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}.$$

Siden

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx \geq 0,$$

må

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}. \quad \square$$

Merk til slutt at dersom vi har uendelig mange funksjoner  $\phi_n$ , impliserer Bessels ulikhet at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

er en konvergent rekke, og at  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$ .

## Fourierrekker

En *generell fourierrekke* er et uttrykk på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

En *trigonometrisk rekke* er en fourierrekke av trigonometriske funksjoner

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Merk at dette er en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor  $e^{ix}$ . Fra nå av skal alt handle om trigonometriske rekker.

**Definisjon.** La  $f$  være en funksjon. Vi definerer  $f$  sin *fourierrekke* som

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og skriver

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Vi skal nå stille oss spørsmålet for hvilke  $f$  det er riktig å skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Ved første øyekast kan man bli forledet til å tro at kun harmoniske svingebevegelser kan skrives på denne måten, og det trodde de fleste matematikere helt frem til 1800-tallet en gang. Det viser seg imidlertid at nesten alle funksjoner mellom himmel og jord kan skrives som trigonometriske rekker, bare man løsner litt på konvergensbegrepet. Det har ikke vi mulighet til å gjøre ordentlig, men vi skal bevise et klassisk konvergensteorem. Først må vi bare ha litt mer maskineri.

Uttrykket

$$S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

kalles *den N-te partialsummen* til fourierrekken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Uttrykket

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

kalles *dirichletkjernen*. Den er en reell funksjon, for vi kan skrive

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nx.$$

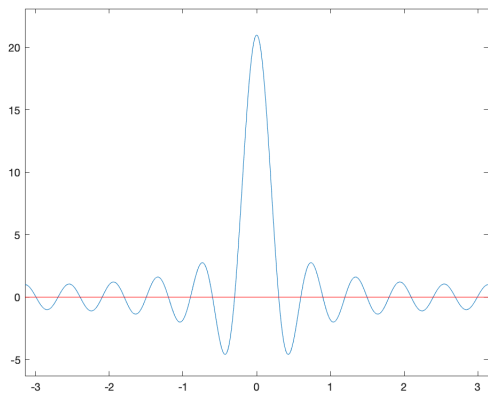
Under er et plot av dirichletkjernen for  $N = 10$ .

Vi kan også lage en enda penere formel. Først utnytter vi at en trigonometrisk rekke er en geometrisk rekke med faktor  $e^{ix}$ , og skriver

$$e^{iNx} \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Siden

$$\frac{e^{-i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2}} e^{iNx} = 1$$



kan vi beregne

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{inx} &= \frac{e^{-i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2}} e^{iNx} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)x} + e^{i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

for  $x \neq 0$ . Siden  $D_N(0) = 2N + 1$ , og

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{N + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2N + 1,$$

kan vi skrive

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} & x \neq 0 \\ 2N + 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vi kan bruke dirichletkjernen til å skrive partialsummen til en fourierrekke som en konvolusjon:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{inx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy = f * D_N. \end{aligned}$$

Det er ikke så vanskelig demonstrere punktvis konvergens for funksjoner som er litt mer enn bare kontinuerlige.

**Teorem 15.35.** La  $f$  være en  $2\pi$ -periodisk funksjon, og la  $x$  være et punkt slik at

$$|f(x-t) - f(x)| \leq M|t|$$

for alle  $t \in (-\pi, \pi)$ . Da er

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = f(x).$$

*Bevis.* Husk dirichletkjernen

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

For det første er det lett å se at

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dt = 2\pi,$$

og siden  $D_N$  er en  $2\pi$ -periodisk funksjon, kan vi like gjerne skrive

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-x) dt = 2\pi.$$

På grunn av denne likningen, kan vi, siden både  $f$  og  $D_N$  er  $2\pi$ -periodiske, skrive

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dt.$$

Siden både  $f$  og  $D_N$  er  $2\pi$ -periodiske, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Alt dette kan vi slå sammen til

$$f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(x)) D_N(t) dt.$$

Vi tar en titt på funksjonen

$$g(t) = \frac{f(t-x) - f(x)}{\sin t/2}$$

Siden  $|f(t-x) - f(x)| \leq M|t|$ , er denne funksjonen er begrenset på  $[-\pi, \pi]$ . Den er ikke definert for  $t = 0$ , men det gjør ikke noe, for vi skal bare integrere den. Nå skriver vi

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N + 1/2)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos t/2 \sin Nt dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin t/2 \cos Nt dt. \end{aligned}$$

Bruker vi Eulers formel på  $\sin Nt$  og  $\cos Nt$  ser vi at de to siste integralene er satt sammen av fourierkoeffisientene til funksjonene  $g(t) \sin t/2$  og  $g(t) \cos t/2$  og de komplekskonjugerte av disse. Fra Bessels ulikhet vet vi at alle disse fire må gå mot null når  $N \rightarrow \infty$ , og med andre ord må både

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos t/2 \sin Nt dt = 0$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin t/2 \cos Nt dt = 0$$

slik at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = f(x). \quad \square$$

**Kommentar.** Det finnes noen berømte eksempler på kontinuerlige funksjoner der fourierrekken ikke konvergerer i alle punkter. Så at  $f$  er kontinuerlig, er ikke nok. Betingelsen

$$|f(x-t) - f(x)| \leq M|t|$$

for alle  $t \in (-\pi, \pi)$ , kalles gjerne *Lipschitz-kontinuitet*, og er litt strengere enn vanlig kontinuitet.

Det går an å vise et litt mer generelt teorem, men det skal ikke vi gjøre, vi bare skriver det opp.

**Teorem 15.36.** La  $f$  være en stykkvis kontinuerlig deriverbar funksjon på  $[-\pi, \pi]$ , der den venstre- og høyrederiverte eksisterer i eventuelle bruddpunkter, og la

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Hvis  $f$  er kontinuerlig i punktet  $x$ , konvergerer fourierrekken til  $f(x)$  i  $x$ . Dersom  $f$  ikke er kontinuerlig i  $x$ , konvergerer fourierrekken til

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}.$$

I endepunktene konvergerer fourierrekken til

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi-h) + f(-\pi+h)}{2}.$$

Dersom  $f$  er kontinuerlig deriverbar, er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på  $(-\pi, \pi)$ , og dersom  $f$  er kontinuerlig deriverbar med periode  $2\pi$ , er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på  $[-\pi, \pi]$ .

### En haug med eksempler

I dette avsnittet skal jeg beregne en helt syk mengde eksempler for dere.

**Eksempel 15.37.** Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der } x \in (-\pi, \pi).$$

Vi beregner

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

og

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = -\frac{1}{2in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) \\ &= -\frac{1}{in} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}. \end{aligned}$$

Siden  $x$  er glatt på intervallet  $(-\pi, \pi)$ , blir fourierrekken

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{-inx} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad \triangle \end{aligned}$$

### Fourierrekker på reell form

Dersom  $f$  er reell, blir fourierrekken også reell, som illustrert i forrige eksempel. Vi kan fint sette opp fourierrekken direkte med sinus- og cosinusfunksjoner:

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

for disse funksjonene utgjør også et ortogonalt system. koeffisientene blir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

**Eksempel 15.38.** Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der } x \in (-\pi, \pi).$$

en gang til. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir  $a_0$  og  $a_n$ , mens  $b_n$  må beregnes. Fourierrekken blir som kjent

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad \triangle$$

**Eksempel 15.39.** Vi finner heavisidefunksjonen

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

sin reelle fourierrekke på  $(-\pi, \pi)$ . Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases}$$

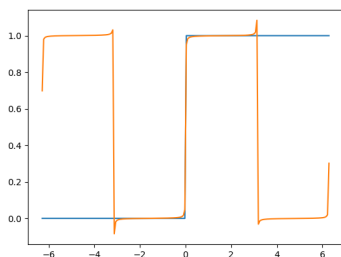
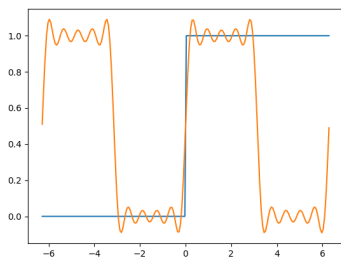
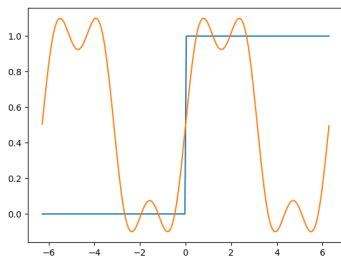
Altså kan vi skrive

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Fourierrekken konvergerer til  $u$  på intervallene  $(-\pi, 0)$  og  $(0, \pi)$ , og til  $1/2$  i  $x = 0$  og  $x = \pm\pi$ . Partialsommer er funksjoner på formen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Under er plot av partialsummer for  $n = 2$ ,  $n = 5$  og  $n = 100$ . Jeg har plottet på intervallet  $[-2\pi, 2\pi]$  for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet  $[-\pi, \pi]$ .  $\triangle$



## Formler for overgang mellom kompleks og reell fourierrekke

Vi har sett i eksempler at dersom  $f$  er en reell funksjon, blir fourierrekken også reell, til tross for at de trigonometriske eksponentialene er komplekse funksjoner. Dette følger av formelen for koeffisientene  $c_n$ . Dersom  $f$  er reell, kan vi skrive

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \overline{c_{-n}}$$

Dette betyr at

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n e^{inx} + \overline{c_n e^{inx}}$$

blir en reell funksjon, og følgelig er hele fourierrekken reell.

Vi kan utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form:

$$c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-inx} + e^{inx}) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n$$

$$c_n - c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-inx} - e^{inx}) dx \right)$$

$$= \frac{-i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -ib_n$$

Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene, og skrive

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

## Fourierrekker på andre intervaller

Å utlede formler for fourierrekker på andre intervaller enn  $[-\pi, \pi]$  er ikke vanskelig. For intervallet  $[-L, L]$  skriver man

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}. \quad (15.2)$$

eller

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Koeffisientene er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{n\pi x}{L}} dx,$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

henholdsvis. Utledning er identisk med utledning på intervallet  $[-\pi, \pi]$ . På samme måte kan man sette opp fourierrekker på intervallet  $[a, b]$ , men det dropper vi.

**Eksempel 15.40.** Vi beregner den komplekse fourierrekken til heavisidefunksjonen på  $[-1, 1]$ . Koeffisientene blir

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{n\pi i} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n, \end{cases}$$

slik at

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i x}.$$

Merk nok en gang at

$$c_n e^{n\pi i x} + c_{-n} e^{-n\pi i x} = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x,$$

slik at

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x. \quad \triangle$$

### Odde og jevne funksjoner

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

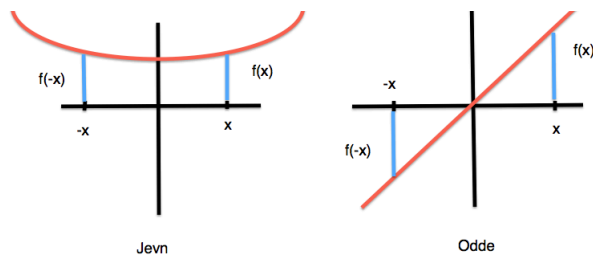
for alle  $x$  i definisjonsmengden til  $f$ . Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den  $\pi$  radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om  $y$ -aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

for jevne funksjoner.



**Eksempel 15.41.** Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La  $f$  være odde og  $g$  være jevn. Siden  $f(-x) = -f(x)$ , og  $g(-x) = g(x)$ , får vi

$$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x),$$

altså er  $fg$  en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte.  $\triangle$

**Eksempel 15.42.** Merk at  $u - \frac{1}{2}$  er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i fourierrekken til  $u$ .  $\triangle$

Merk at dersom  $f$  er odde, er  $a_n = 0$  for alle  $n$ , mens dersom  $f$  er jevn, er  $b_n = 0$  for alle  $n$ . Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

### Odde og jevne utvidelser

Dersom en funksjon  $f$  har definisjonsmengde  $(0, L)$ , kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ -f(-x) & \text{for } x = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ f(-x) & \text{for } x = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både  $f_o$  og  $f_j$  er identiske med  $f$  på  $(0, L)$ , vil fourierrekken deres konvergere til  $f(x)$  på  $(0, L)$ . Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle  $f$  på  $(0, L)$ . Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekken til  $f$  på  $(0, L)$ .

Vi ser på fourierutviklingen til  $f_o$ . For den har vi at  $a_n = 0$  for alle  $n$ , og at

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

For fourierutviklingen til  $f_j$ , har vi tilsvarende at

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_j(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

samt

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_j(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

**Eksempel 15.43.** Vi beregner cosinusrekken til  $f(x) = x$  på  $(0, \pi)$ . Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi/2$$

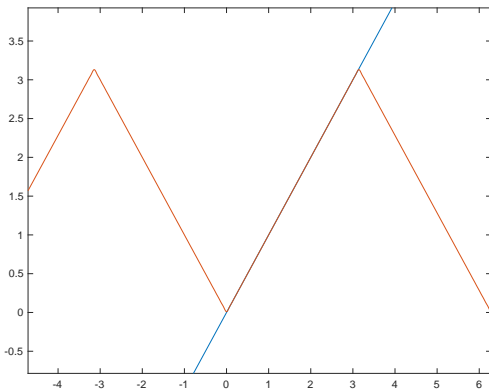
og

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n. \end{cases}$$

slik at

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

på intervallet  $(0, \pi)$ . Under er et plot af  $f(x) = x$  og cosinusrekken på et litt større intervall enn  $[0, \pi]$ .  $\triangle$



### Parsevals identitet

**Teorem 15.44.** Anta integralet

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx$$

eksisterer, og at

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

Da gjelder Parsevals identitet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

*Bevis.* Denne er lettest å bevise om man starter på kompleks form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

Vi ganger denne likheten med seg selv

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i \frac{m\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m} e^{i \frac{-m\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} e^{i \frac{(n-m)\pi x}{L}} \end{aligned}$$

og integrerer

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f^2(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} \int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi x}{L}} dx \\ &= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} \\ &= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{c}_n = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Likningen

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

vises på samme måte.  $\square$

### Noen artige anvendelser

Her er en samling eksempler som ofte dukker opp på eksamen i M4.

**Eksempel 15.45.** Vi kan bruke fourierrekken til heavisidefunksjonen til å finne summen til rekken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Siden

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

og  $u$  er glatt i  $x = \pi/2$ , ser vi at

$$\begin{aligned} 1 = u(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \quad \triangle$$

**Eksempel 15.46.** Vi kan bruke Parsevals identitet til å finne summen til den kjente og kjære rekken

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Siden

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

gir Parsevals identitet at

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

eller

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \triangle$$

### Epilog

Disse to teoremene beviste vi for ortogonale systemer i dette kapitlet. Fourieranalyse spinner videre på dette, og setter opp de samme teoremene, bare i uendelig mange dimensjoner. Vi definerer indreproduktet

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dx,$$

lager oss en ortogonal mengde,

$$e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

og prøver å skrive funksjoner som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Uttrykket

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

kan betraktes som projeksjonen av  $f$  ned i det uendeligdimensjonale rommet utspent av funksjonene  $e^{inx}$ , og koeffisienten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

er  $f$  sin komponent langs vektoren  $e^{inx}$ . Beregningen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

ville vi i M3 skrevet

$$\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n = 2\pi,$$

og

$$\mathbf{u}_n^* \mathbf{v} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og så satt sammen alt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Det kan også nevnes at Parsevals teorem er en uendeligdimensjonal variant av Pytagoras' teorem, som du lærte allerede på ungdomsskolen.

Med dette i bakhuet, er det naturlig å spørre seg hva slags vektorrom funksjonene  $e^{inx}$  er basis for. Dette er et komplisert spørsmål, og ble ikke ordentlig besvart før tidlig på 1900-tallet. Rommet heter  $L^2$ , og vi skal snakke litt løst om ingrediensene i konstruksjonen.

For å få et meningsfylt svar, må man for det første gå over til å betrakte ekvivalensklasser av funksjoner, heller enn funksjoner. Grunnen er at funksjoner som kun er forskjellige i enkelte punkter her og der, vil ha den samme fourierrekken, og dette kan vi ikke ha noe av, for et element i rommet bør helst kunne representeres på en entydig måte i basisen  $\{e^{inx}\}$ .

For det andre må man justere litt på konvergensbegrepet. Hva vil det si at rekken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

konvergerer til  $f$ ? Punktvis konvergens, altså at fourierrekken konvergerer til  $f$  for hver  $x$ , er greit hvis man skal bevise noe i et grunnleggende kurs i fourieranalyse, men om man løsner litt på konvergensbegrepet, vil man se at det finnes en mye større klasse av funksjoner kan representeres ved sin fourierrekke. Vi beviser heller at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{når } N \rightarrow \infty.$$

som kalles  $L^2$ -konvergens. Denne konvergens sier i prinsippet at arealet mellom  $f$  og partialsummen skal gå mot null når partialsummen går mot fourierrekken til  $f$ .

Når alt dette er sagt og gjort, ekvivalensklasser av funksjoner er definert, og  $L^2$ -konvergens er tatt i bruk, kan man vise at  $L^2$  består, litt forenklet, av alle funksjoner som tilfredsstill

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \bar{f} dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty.$$

Legendrepolyomene er en ortogonal basis for  $L^2[-1, 1]$ .

Joseph Fourier oppfant fourierrekker da han prøvde å løse varmelikningen tidlig på 1800-tallet. Ideene hans ble i noen grad avskrevet av samtidige matematikere, for bevisene hans holdt ikke alltid vann. Men eksemplene han oppdrev på at en diskontinuerlig funksjon kan skrives som en uendelig rekke av glatte funksjoner, var banebrytende, og stimulerer andre matematikere til å utvikle nytt maskineri for å rydde opp i disse konvergensspørsmålene, som Fourier bare gjettet tildels riktig på.

Andre artige opplysninger om Joseph Fourier, er at at han ble satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som første som oppdaget drivhuseffekten.

### Kvadratur