4 Partielle differensiallikninger

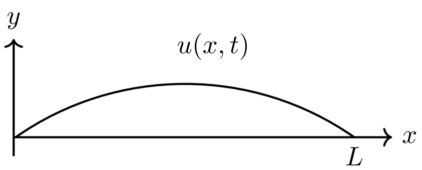
Fysiske situasjoner der det er behov for mer enn en uavhengig variabel, beskrives gjerne av partielle differensiallikninger. Vi skal ta for oss tre av de mest grunnleggende likningene, nemlig bølgelikningen, varmelikningen, og Laplaces likning.

Bølgelikningen

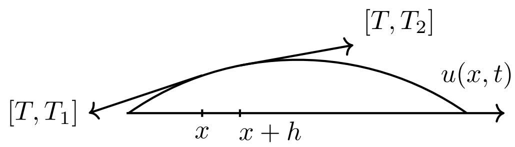
Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe. Vi skal ta for oss selve likningen, hvor den kommer fra, og to forskjellige løsningsteknikker - en for et intervall på x-aksen, og en for hele x-aksen.

Utledning

Vi tenker at vi har en vibrerende streng som er spent opp i $x = 0$ og $x = L$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert tidspunkt t og hvert punkt x beskriver utslaget fra likevektslinjen, som ligger langs x-aksen. Strengen har konstant massetetthet $\rho\,[kg/m]$.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekket, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekket er konstant lik T.



Vi setter opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er $h\rho$, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $u_{tt}(x, t)$. Netto kraft på biten er gitt ved $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho u_{tt}(x, t) = T_2 + T_1,$$

eller

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{T}u_{tt}(x, t) &= \frac{T_2/T + T_1/T}{h} \\ &= \frac{u_x(x + h, t) - u_x(x, t)}{h},\end{aligned}$$

siden stigningstallet til tangenten til strengen er gitt ved u_x. Lar vi nå $h \to 0$, får vi bølgeligningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

der $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Oppstilling av problem

Det er ikke nok med en differensialligning som beskriver strengens bevegelse. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Et fullstendig oppstilt problem er:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \tag{4.1}$$

med randkrav

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{4.2}$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \qquad u_t(x, 0) = g(x). \tag{4.3}$$

Selve differensialligningen (4.1) forteller oss hva slags fysiske lover som skal tilfredsstilles (i dette tilfelle Newtons andre lov), eller hva slags oppførsel vi kan forvente av løsningen, for eksempel at det er en vibrerende streng det er snakk om. Randkravene (4.2) forteller oss at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = L$, slik at løsningen står helt i ro der. Initialkravene (4.3) forteller oss noen om hvordan bevegelsen settes i gang; f angir strengens posisjon ved $t = 0$, mens g angir strengens fart ved $t = 0$. Når man spiller en tone på en gitar ved å dra i strengen og slippe den, slik man vanligvis gjør, er $g = 0$. Randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{4.4}$$

kalles *dirichletrandkrav*.

Løsning på intervall - separasjon av variable

Et stort geni har engang tenkt at løsningen på bølgeligningen kan skrives

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Han hadde rett. Innsetting i (4.1) gir

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

Vi deler på $c^2 F(x)G(t)$ og får

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}.$$

Siden x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre, må vi ha at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

der k er en foreløbig ubestemt konstant. Vi ganger opp med $c^2 F(x)G(t)$ og bytter fortegn på k, slik at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kc^2 G(t) = 0.$$

Vi skal først prøve å finne ut hva k kan være. Vi kan bruke F og randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

til dette. La oss kikke på

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

Dersom $k = 0$, får vi

$$F''(x) = 0$$

som gir

$$F(x) = Ax + B.$$

Er dette en interessant løsning? Vel, nei. Dersom

$$F(0)G(t) = u(0,t) = 0,$$

må enten $F(0) = 0$ eller $G(t) = 0$. At $G(t) = 0$, slik at $u(x,t) = 0$, er en gyldig løsning av bølgelikningen, som også tilfredsstiller randkravene. Men dette er åpenbart ikke en spesielt interessant løsning, så jeg tror vi går for $F(0) = 0$, som impliserer $B = 0$. Det andre randkravet

$$u(L,t) = 0$$

gir likeledes at $F(L) = 0$, altså at $AL = 0$, som impliserer at $A = 0$. Dette impliserer igjen at $u(x,t) = 0$, vi konkluderer at $k = 0$ og $F(x) = 0$ ikke er en interessant løsning av problemet.

La oss prøve $k < 0$. I så fall løses

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

av

$$F(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$$

Dersom vi nå bruker randkravene, får vi de to likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{-k}L} + Be^{-\sqrt{-k}L} &= 0 \end{aligned}$$

Dersom $k \neq 0$ (som vi jo allerede vet), er determinanten til dette systemet gitt ved

$$e^{\sqrt{-k}L} + e^{-\sqrt{-k}L} \neq 0$$

og vi konkluderer med at $A = B = 0$, slik at $F(x) = 0$. Altså er heller ikke $k < 0$ en interessant løsning.

Dersom $k > 0$, går alt så meget bedre, og vi får

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Bruker vi randkravet $u(x,t) = 0$, får vi

$$A = 0,$$

og krever vi

$$F(L) = B\sin(\sqrt{k}L)G(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $B = 0$, som er uinteressant siden da blir $u(x,t) = 0$, eller ved å kreve

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

slik at

$$k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Vi ser også at $n > 0$, for dersom $n < 0$ byttes bare fortegnet på B, som ennå er ubestemt. Ved å ta en titt på det endelige løsningen av problemet nedenfor, ser man at B kommer til å bli overflødig, så vi velger $B = 1$.

Ligningene

$$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0.$$

løses av

$$G_n(t) = A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t,$$

så de generelle løsningene til bølgeligningen med randkrav (4.2) blir

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= F(x)G_n(t) \\ &= \left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \end{aligned}$$

Vi har ennå ikke tatt stilling til initialkravene (4.3). Det kan vi klare ved å skrive

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \end{aligned}$$

Dersom vi nå krever

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

ser vi at summen til høyre bør være fourierrekken til den odde utvidelsen til f, og følgelig bør

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

På samme vis, dersom

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

bør summen til høyre være fourierekken til den odde utvidelsen til g, og følgelig må

$$B_n c\frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

slik at

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Vi oppsummerer i et teorem.

Teorem 4.1. *Bølgeligningen*

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \Big) \sin \frac{n\pi}{L}x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x\, dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L}x\, dx.$$

Løsning for fløyte

En stående trykkbølge inne i fløyte, beskrives av problemet

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres. (Dersom du spiller på fløyten inni en gassballong full av helium, blir c høyere enn i luft.) Randkravene kalles *von-Neumann-randkrav*, og L er lengden på fløyten.

Vi løser problemet på samme måte som for den vibrerende strengen. Den eneste forskjellen blir i forbindelse med løsning av

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

På samme vis må $k > 0$, slik at

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Siden

$$F'(x) = -A\sqrt{k}\sin\sqrt{k}x + B\sqrt{k}\cos\sqrt{k}x$$

impliserer

$$u_x(0,t) = F'(0) = 0,$$

at $B = 0$, mens

$$u_x(L,t) = F'(x) = -A\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L = 0,$$

gir som før at

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

Merk at $n = 0$ er en gyldig løsning her siden en konstant funksjon løser både bølgelikningen og von-Neumann-randkravene. Resten blir som før, men vi må bruke cosinusrekkene til f og g istedet for sinusrekkene. Vi tar ikke resten av regningen, men oppsummerer med et teorem.

Teorem 4.2. *Bølgeligningen*

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L}t \Big) \cos \frac{n\pi}{L}x,$$

der A er en vilkårlig konstant,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x\, dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L}x\, dx.$$

Løsning på hele x-aksen - D'alembert

Hvis man ikke ønsker å bruke bøglelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må man studere bølgelikningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

og ingen randkrav. Her skal løsningen gjelde for alle x, ikke bare på intervallet $[0, L]$

I noen tilfeller kan dette gjøre alt vanskeligere, men akkurat i tilfellet bølgelikningen, blir alt fryktelig enkelt. Det er enkelt å sjekke at funksjonen

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

passer i likningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare. Spørsmålet blir bare da hvordan vi skal klare å innpasse initialkravene.

Dersom man bruker

$$u(x,0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$u_t(x,0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int^x g(t)\,dt + C$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int^x g(t)\,dt + C$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int^x g(t)\,dt - C$$

Vi setter nå alt sammen igjen

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) \\
& + \frac{1}{2c}\left(\int^{x+ct} g(t)\,dt - \int^{x-ct} g(t)\,dt\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt,
\end{aligned}$$

og oppsummerer i et teorem.

Teorem 4.3. *Bølgeligningen*

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

på hele x-aksen, med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt.$$

Varmelikningen

Varmelikningen beskriver kort og godt varmeflyt i materialer. Vi skal ta for oss den enkleste varianten, der varmeledningsevnen er identisk overalt og i alle retninger i materialet.

Utledning

I en ideell gass er det et lineært forhold mellom temperatur og opplagret bevegelsesenergi, gitt ved

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

der $k = 1.38064852(79) \times 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant, v er gjennomsnittsfarten til gassmolekylene, og T er temperaturen målt i Kelvin. Vi kan altså tenke på temperatur som et mål på opplagret energi av et eller annet slag. I andre materialer enn ideelle gasser er virkeligheten noe mer komplisert, men det skal vi ikke gå inn på.

La oss tenke at denne opplagrede varmeenergien (eller temperatur om du vil), er gitt ved funksjonen $u(x,y,z,t)$, der (x,y,z) er de romlige koordinatene, t er tidspunktet, og u måles i J/m^3 eller liknende. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Den totale opplagrede energien i Ω er gitt ved

$$\iiint_\Omega u(x,y,z,t)\,dxdydz.$$

Dersom vi legger noen milde restriksjoner på glattheten til u, er endringen i denne energien over tid gitt ved

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega u(x,y,z,t)\,dV = \iiint_\Omega u_t(x,y,z,t)\,dV$$

Fouriers lov sier at endringen i varmeenergi i Ω enten skyldes varme som produseres inne i Ω (tenk at det står et stearinlys og brenner inne i Ω), eller varme som slipper inn og ut gjennom randen $\partial\Omega$, gitt ved

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

der F er et vektorfelt som beskriver varmeflyten. Vi skal ikke ta i betrakning tilfeller der varme produseres inne i Ω, så Fouriers lov blir

$$\iiint_\Omega u_t\,dV = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

For mange materialer er det rimelig å anta at

$$\mathbf{F} = c^2\nabla u,$$

der c er en konstant relatert til varmeledningsevnen til mediet, slik at fouriers lov blir

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega u_t\,dV &= \iiint_\Omega \operatorname{div}\nabla u\,dV \\
&= \iiint_\Omega u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,dV
\end{aligned}$$

og siden dette bør gjelde for et tilfeldig valgt område Ω, bør

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

som kalles *varmelikningen* eller *diffusjonslikningen.*

Varmelikningen er der alt startet. Fouriers lov er oppkalt etter Joseph Fourier, og det var i forbindelse med hans utledning og analyse av varmelikningen at fourieranalysen så dagens lys.

Løsning på begrenset intervall

Nå skal vi tenke oss en isolert stang der temperaturen er gitt av $u(x,t)$. Varme kan slippe ut eller tilføres gjennom endepunktene, men ingen andre steder. Vi skal løse varmeligningen

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

på stang med lengde L. Randkravene

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{4.5}$$

sier at temperaturen holdes konstant lik 0 i endepunktene, og initialkravet

$$u(x,0) = f(x) \tag{4.6}$$

sier at temperaturfordelingen er gitt ved $f(x)$ når tiden begynner å gå.

Vi prøver separasjon av variable

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

På samme vis som for bølgeligningen, får vi

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G'(t) + kc^2 G(t) = 0.$$

Å finne F og k blir eksakt repetisjon av argumentet for bølgeligningen, mens

$$G_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

slik at de generelle løsningene til bølgeligningen med randkrav $u(0,t) = u(L,t) = 0$ blir

$$u_n(x,t) = F(x)G_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Likeledes kan initialkravet $u(x,0) = f(x)$ inkorporeres ved å legge sammen alle løsninger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

sette $t = 0$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

og observere at vi får dette til dersom A_n er fourierkoeffisientene til den odde utvidelsen til f

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Teorem 4.4. *Varmelikningen*

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x)$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Løsning på hele x-aksen

Vi skal nå løse varmeligningen

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

på en uendelig lang stang. Randkravene skal være

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0, \tag{4.7}$$

mens initialkravet er som før

$$u(x,0) = f(x), \tag{4.8}$$

der vi antar

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0. \tag{4.9}$$

Vi skal løse dette problemet ved å fouriertransformere varmeligningen med hensyn på x. Siden $\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0$, satser vi på at det går bra, og vi får

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx}).$$

Vi tar en kikk på disse to. Hvis vi antar at u er kontinuerlig deriverbar i t, og fouriertransformen er med hensyn på x, kan vi skrive

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} \, dx = \hat{u}_t(w,t),\end{aligned}$$

og

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -w^2 \mathcal{F}(u) = -w^2 \hat{u}(w,t),$$

slik at

$$\hat{u}_t = -c^2 w^2 \hat{u}.$$

Vi later som om dette er en ordinær differensialligning for $\hat{u}$, og får

$$\hat{u}(w,t) = A(w) e^{-c^2 w^2 t}.$$

Fouriertransformerer vi initialkavet, ser vi at

$$A(w) = \hat{u}(w,0) = \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(w),$$

og da er det egentlig bare å inversfouriertransformere, og så har vi løsningen

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} \, dw.$$

Vel og bra, men vi kan komme oss et knepp til. Husk at

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}\, \hat{f}\hat{g}\right),$$

og observer at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} \, dw = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f} e^{-c^2 w^2 t}\right).$$

Med andre ord, hvis vi kunne inverstransformere $e^{-c^2 w^2 t}$ hadde det vært bra. Husk fra tabellen at

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-w^2}{4a}}.$$

Setter vi

$$a = \frac{1}{4c^2 t},$$

og ganger og deler litt med konstanter, kan vi si at

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{\frac{-x^2}{4c^2t}}\right) = e^{-c^2w^2t},$$

som gir

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}e^{-c^2w^2t}) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f * \frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{\frac{-x^2}{4c^2t}}\right) \\ =& \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2t}}\,dv \end{aligned}$$

Onde tunger vil hevde at $u(x,t)$ ikke er definert for $t=0$. Ikke bra, for vi har jo prøvd å få til at $u(x,0) = f(x)$, som åpenbart ikke er helt riktig. Det kan vises at

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

men det skal ikke vi gjøre.

Teorem 4.5. *Varmelikningen*

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

på hele x-aksen med initialkrav

$$u(x,0) = f(x)$$

løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2t}}\,dv,$$

og vi har

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x).$$

Laplaces ligning

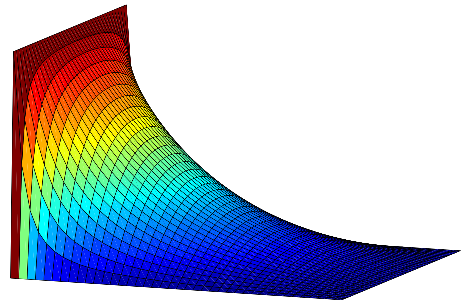
For å forstå hvor Laplace' ligning kommer fra, må man betrakte varmeligningen i romlige dimensjoner

$$u_t = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right).$$

Det fysiske bildet du kan ha, er en tynn varmeisolert plate der varmeenergi kan forsvinne ut eller inn gjennom sidekantene. Løsningen til varmeligningen vil da gi temperaturen $u(x,y,t)$ i platen gitt fornuftige rand- og initialkrav. Vi skal ikke løse varmeligningen i to romlige dimensjoner, men derimot betrakte spesialtilfellet der $t \to \infty$, slik at varmestrømmen er konstant, eller steady-state flow som vi sier på norsk. Dersom varmestrømmen er konstant, er $u_t(x,y,t) = 0$, slik at varmeligningen blir

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Dette kalles Laplace' ligning, og den kan vi løse med teknikker vi har lært i kurset. Her er en figur som beskriver en typisk situasjon. Dette er temperaturen i en tynn plate der temperaturen holdes konstant lik null på tre sider, og konstant lik fem eller en eller noe på den siste siden.



Løsning på begrenset intervall - separasjon av variable

Vi setter opp problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

på rektangelet $[0,a] \times [0,b]$ med randkrav

$$u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(x,b) = f(x).$$

Vi separerer i vei

$$u(x,y) = F(x)G(y).$$

På samme vis som for bølgeligningen og varmeligningen, får vi

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(y) - kG(y) = 0.$$

Å finne F og k blir eksakt repetisjon av argumentet for bølgeligningen, mens

$$G_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

slik at de generelle løsningene som tilfredsstiller $u(0,y) = u(b,y) = 0$ blir

$$u_n(x,y) = F(x)G_n(y) = \left(A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Krever vi $u(x,0) = 0$, får vi

$$A_n = -B_n,$$

slik at

$$\begin{aligned} u_n(x,y) &= A_n\left(e^{-\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \\ &= A_n \sinh\frac{n\pi}{a}y \sin\frac{n\pi}{a}x, \end{aligned}$$

og krever vi $u(x,b) = f(x)$, får vi det til ved å legge sammen alle løsninger

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi}{a}y \sin\frac{n\pi}{a}x,$$

og kreve

$$f(x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

slik at

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Løsning i halvplanet

Vi skal se på Laplaces ligning

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

i halvplanet. Randkrav skal være

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$$

og

$$u(x,0) = f(x),$$

der

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Siden $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y) = 0$ satser vi på at u er absolutt integrerbar i x, slik at vi kan fouriertransformere med hensyn på x. Da får vi

$$\mathcal{F}(u_{xx}) + \mathcal{F}(u_{yy}) = \mathcal{F}(0)$$

eller

$$-w^2\hat{u}(w,y) + \hat{u}_{yy}(w,y) = 0.$$

Akkurat som med varmeligningen, later vi som om dette er en ordinær differensialligning i y, og får

$$\hat{u}(w,y) = A(w)e^{-|w|y} + B(w)e^{|w[y}.$$

Nå må vi fouriertransformere randkravet $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$, og da får vi

$$\lim_{y\to\infty} \hat{u}(w,y) = 0.$$

Bruker vi dette, ser vi at $B(w) = 0$, og følgelig er

$$\hat{u}(w,y) = A(w)e^{-|w|y}.$$

Transformerer vi $u(x,0) = f(x)$, får vi

$$\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w),$$

og bruker vi denne, får vi

$$\hat{u}(w,y) = \hat{f}(w)e^{-|w|y}.$$

Nå kan vi inverstransformere og få

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-|w|y}e^{iwx}\,dw \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)e^{-|w|y}). \end{aligned}$$

Nå bruker vi samme trikset som for varmeligningen. Siden dette er inversfouriertransformen til produktet mellom $\hat{f}(w)$ og $e^{-|w|y}$, og

$$\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = e^{-|w|y},$$

ser vi at

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\frac{y}{(x-v)^2+y^2}\,dv. \end{aligned}$$

Noen artige egenskaper

En funksjon som tilfredsstiller

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

kalles gjerne en *harmonisk funksjon*. Harmoniske funksjoner har morsomme egenskaper.

> **Teorem 4.6.** *La u være harmonisk på Ω, og la $\mathcal{C} \in \Omega$ være en sirkelskive med sentrum i (x_0, y_0) og radius a. Da gjelder at*
>
> $$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\partial\mathcal{C}} u\,ds = \frac{1}{\pi a^2}\iint_{\mathcal{C}} u\,dA.$$

Vi lar denne stå ubevist inntil videre. Beviset kommer ikke på eksamen i år. Ta kontakt om du lurer.

> **Teorem 4.7.** *La u være harmonisk på Ω, og la $\mathcal{C} \in \Omega$ være en sirkelskive med sentrum i (x_0, y_0) og radius a. Da ligger*
>
> $$\max_{(x,y)\in\mathcal{C}} u(x,y)$$
>
> *og*
>
> $$\min_{(x,y)\in\mathcal{C}} u(x,y)$$
>
> *på $\partial\mathcal{C}$.*

Vi beviser ikke denne heller.