

1. Vis at

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

2. Vis at for  $x > 0$  er  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2x^{1/n} - 1)^n = x^2$ .

3. La  $S$  være en uendelig mengde av reelle tall slik at  $|s_1 + \dots + s_k| < 1$  for alle endelige undermengder  $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ . Vis at  $S$  er tellbar.

4. La  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  slik at for alle  $c > 0$  kan grafen til  $f$  forflyttes til grafen til  $cf$  ved translasjon eller rotasjon. Følger det at  $f(x) = ax + b$  for reelle tall  $a, b$ ?

5. La  $D$  være den lukkede enhetsdisken i planet og la  $p_1, \dots, p_n \in D$ . Vis at det finnes et punkt  $p \in D$  slik at

$$\sum_{i=1}^n |p - p_i| \geq n.$$

6. Vis at for alle  $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  finnes det en funksjon  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  slik at  $f(x, y) \leq g(x) + g(y)$ .

7. La  $C \subset \mathbb{R}$  være lukket og begrenset. Vis at det ikke finnes en funksjon  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  slik at  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  for alle  $a \in C$ .

8. (a) La  $a_1, a_2, \dots$  være en følge av reelle tall slik at  $a_1 = 1$  og  $a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n$  for alle  $n \geq 1$ .  
Vis at følgen

$$b_n = \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

har en endelig grense eller går mot uendelig.

(b) Vis at for alle  $\alpha > 1$  finnes en følge  $a_1, a_2, \dots$  med de samme egenskapene som i (a) slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$$