

Lineær algebra

Siden dette temaet er alt for stort til å kunne gjennomgå på en halvtime, med alle de teoremene og definisjonene som skal til, har jeg laget dette notatet. Det bygger hovedsakelig på notatene fra problemløsningskurset våren 2005, men også på andre kilder.

Vi bruker ingen spesielle symboler for å skille vektorer fra skalarer under (ingen piler, ingen fete bokstaver).

0.1 Vektorrom

Lineær algebra foregår i *vektorrom*. Denne definisjonen har de fleste fått servert i Matte 3, men gjentas her for komplettets skyld.

Definisjon Et *vektorrom* består av en *kommutativ gruppe* $(V, +)$, en *kropp* $(K, +, \cdot)$ og et skalarprodukt $\cdot : K \times V \rightarrow V$ som oppfyller

- $a(u + v) = au + av$ (den distributive loven, del 1)
- $(a + b)u = au + bu$ (den distributive loven, del 2)
- $a(bu) = (ab)u$
- $1u = u$

for alle $a, b \in K$ og $u, v \in V$. Vi sier at V er et vektorrom *over* K .

Kommutative grupper og kropp er algebraiske strukturer i sin egen rett, men det tar vi ikke her. Du trenger egentlig ikke vite hva disse er, i prinsippet så betyr det at vi har lov til å gjøre alle tingene vi forventer å kunne gjøre i vektorrom.

I definisjonen over er V mengden med ‘vektorer’ og K mengden med ‘skalarer’. I hovedsak vil disse være $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ og $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, men ikke alltid (se oppgave #).

For å formulere noen grunnleggende fakta om vektorrom trenger vi følgende definisjoner.

Definisjon Lineærkombinasjon, lineær uavhengighet, spenn, basis og dimensjon.

- En vektor v er en *lineærkombinasjon* av vektorene $v_1, \dots, v_n$ dersom det fins skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ slik at $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. (Det er viktig at summen er endelig.)
- Vektorene $v_1, \dots, v_n$ er *lineært uavhengige* dersom ligningen $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ kun har løsningen $\alpha_i = 0$ for alle i .
- Gitt en mengde $S \subseteq V$ er *spennet* til S , $\text{span } S$ mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorer i S .
- En mengde $B \subseteq V$ er en *basis* til V dersom $\text{span } B = V$ og alle vektorene i B er lineært uavhengige.
- Dimensjonen til V , $\dim V$ er lik antall vektorer i en basis til V . Dersom denne er endelig sier vi at V er endelig dimensjonal. I motsatt fall er V uendelig dimensjonal.

0.2 Lineære operatorer

Definisjon Dersom V og W er to vektorrom over den samme kroppen K , og $T : V \rightarrow W$ er slik at $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ for alle vektorer u, v og skalarer α, β , er T en *lineær operator* fra V til W .

En lineær operator er altså ikke noe mer enn en funksjon mellom to vektorrom som har den (svært ønskelige) egenskapen *linearitet*.

Dersom V og W har endelig dimensjon, og vi har valgt basiser $v_1, \dots, v_n$ for V og $w_1, \dots, w_m$ for W kan enhver lineær operator $T : V \rightarrow W$ beskrives som en $n \times m$ *matrise* $M_T = (m_{ij})$ der elementene m_{ij} er gitt av betingelsen

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^m m_{ij} w_j$$

for alle i .

Merk at dersom $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, og vi velger de vanlige basisene vil matrisen M_T ha den fiffige egenskapen at $T(x) = M_T x$ for alle x . Så når vi jobber i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ skiller vi som regel ikke mellom en matrise og den lineære operatoren den representerer. Det er derfor viktig å merke seg at de følgende definisjonene like så godt kan gjelde matriser som lineære operatorer.

0.3 Lineæralgebraens fundamentalteorem

Jeg tar for gitt at alle vet hvordan man multipliserer matriser, og hvilke egenskaper matrisemultiplikasjon har (hovedsakelig at vi har assosiativitet men generelt ikke kommutativitet).

La $m \times n$ -matrisen A ha radvektorer $r_1, \dots, r_m$ (hver av lengde n). *Radrommet* til A er rommet utspent av alle radvektorer, dvs. $\text{row } A = \text{span} \{r_1, \dots, r_m\}$. Radrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og har maksimal dimensjon m (radvektorene trenger ikke være lineært uavhengige).

Vi kan gjøre det samme med kolonnerommet. La A ha kolonnevektorer $c_1, \dots, c_n$ (hver med lengde m). Da definerer vi kolonnerommet som $\text{col } A = \text{span} \{c_1, \dots, c_n\}$. $\text{col } A$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$, og har maksimal dimensjon n .

La oss nå se på en vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ og produktet Ax . For det første har vi

$$Ax = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i c_i.$$

Så vi ser at Ax alltid er en lineærkombinasjon av kolonnevektorene til A . Mer presist, for enhver $x \in \mathbb{R}^n$ vil $Ax \in \text{col } A$, og for enhver $y \in \text{col } A$ finnes en $x \in \mathbb{R}^n$ slik at $Ax = y$. Så vi har følgende:

Teorem For en $m \times n$ -matrise A er $\text{col } A = \text{im } A$.

$\text{im } A$ er *bildet* til A , dvs. alle vektorer y som kan skrives som $y = Ax$ for en eller annen x .

Korrolar Systemet $Ax = b$ er løsbart hvis og bare hvis $b \in \text{col } A$.

Vi søker nå å finne ut for hvilke x er $Ax = 0$. Vi kan representere A med radvektorer, og da får vi

$$Ax = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} r_1^T x \\ \vdots \\ r_m^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Så $r_i^T x = 0$ for alle i , dvs. x er ortogonal på alle radvektorene.

Teorem $\ker A = (\text{row } A)^\perp$.

$\ker A$ er *kjernen* til A , og er definert som alle vektorene x slik at $Ax = 0$. Kjernen er altså et annet ord på nullrommet. $\ker A$ er et vektorrom. $V^\perp$ er definert som alle vektorer x som står ortogonalt på alle vektorer i V . $V^\perp$ uttales ‘V perp’ og er også et vektorrom.

Før vi formulerer fundamentalteoremet må vi innføre begrepet ‘rang’.

Definisjon *Rangen* til en matrise A , $\text{rank } A$ er lik antall lineært uavhengige rad- eller kolonnevektorer i A .

Antallet lineært uavhengige radvektorer er alltid lik tilsvarende antall kolonnevektorer, så hvilke du bruker for å regne ut rangen er vilkårlig.

Lineæralgebraens fundamentalteorem La A være en $m \times n$ -matrise med $\text{rank } A = k$. Da er

- $\text{col } A \subseteq \mathbb{R}^m$ og $\dim \text{col } A = k$.
- $\text{row } A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\dim \text{row } A = k$.
- $\ker A = (\text{row } A)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\dim \ker A = n - k$.

$\text{col } A$, $\text{row } A$ og $\ker A$ kalles ofte for *fundamentale underrom*. I litteraturen finner man et fjerde, det *venstre nullrommet*, men dette trengs ikke her.

Litt løst sagt er rangen til en matrise et mål på hvor ‘komplett’ matrisa er. Jo høyere rang, jo større radrom og kolonnerom (og dermed bilde), og jo mindre nullrom. Den største rangen en matrise kan ha er $\min(m, n)$, og slike matriser sier vi ofte har *full rang*.

Vi kommer tilbake til rangen i neste kapittel.

0.4 Determinanten og inversjon

Vi ser i det følgende kun på $n \times n$ -matriser (dvs. kvadratiske). Disse matrisene er å betrakte som funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$, dvs. de mapper $\mathbb{R}^n$ på seg selv. Det er naturlig å spørre om A er injektiv (en-til-en, dvs $Ax = Ay$ innebærer $x = y$) eller surjektiv (på, dvs $\text{im } A = \mathbb{R}^n$ - bildet dekker hele $\mathbb{R}^n$). Hvis A er både injektiv og surjektiv er den *bijektiv*, dvs. det finnes en invers transformasjon.

Definisjon Identitetsmatrise, invers matrise.

- Matrisen $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ kalles *identitetsmatrisen* av dimensjon n .
- En matrise A er *invertibel* hvis det finnes en matrise B slik at $AB = I$. Vi sier da at $B = A^{-1}$.

Før vi formulerer det sentrale teoremet om matriseinversjon, må vi definere determinanten. Sannsynligvis kjenner dere nå determinanten fra matte 3. Den formelle definisjonen på determinanten er som følger.

Definisjon $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ er definert som den unike funksjonen som oppfyller egenskapene:

1. $\det [c_1 \ \cdots \ c_i \ \cdots \ c_j \ \cdots \ c_n] = -\det [c_1 \ \cdots \ c_j \ \cdots \ c_i \ \cdots \ c_n]$
2. $\det [c_1 \ \cdots \ c_i + ac_j \ \cdots \ c_n] = -\det [c_1 \ \cdots \ c_i \ \cdots \ c_n]$
3. $\det(I_n) = 1$

for alle $1 \leq i, j \leq n$.

De samme reglene gjelder for radvektorene (det tok bare mindre plass med kolonnevektorer). Det overlates til leseren å vise at det ikke finnes to forskjellige funksjoner som oppfyller kravene ovenfor. Determinanten har følgende kritiske egenskap:

Teorem $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Det neste teoremet er særdeles viktig og utrolig nyttig. Det knytter sammen praktisk talt alle tingene vi har nevnt i forbindelse med matriser så langt.

Teorem De følgende utsagnene om en $n \times n$ -matrise A er ekvivalente.

- A er invertibel.
- $\det(A) \neq 0$.
- $\text{rank } A = n$.
- $\text{col } A = \text{im } A = \mathbb{R}^n$.
- $\text{row } A = \mathbb{R}^n$.
- $\ker A = \{0\}$.

Avslutningsvis nevner vi at dersom $AB = I$ er naturligvis også $BA = I$, og B er invertibel og A er dens invers (eller, med andre ord, $(A^{-1})^{-1} = A$).

0.5 Egenverdier

Til slutt i dette notatet skal vi si litt om egenverdier. En reell $n \times n$ -matrise A har n ikke nødvendigvis distinkte egenverdier, λ_i , $i = 1, \dots, n$. Egenverdiene til en matrise forteller oss *veldig* mye om egenskapene til matrisen. Det er lagt ned mye forskning, både teoretisk og anvendt, på måter å finne egenverdier på. Nuvel, til definisjonen:

Definisjon $\lambda \in \mathbb{C}$ er en *egenverdi* til matrisen A dersom det finnes en vektor $x \neq 0$ slik at $Ax = \lambda x$. Vi sier da at x er den tilhørende egenvektoren.

Først noen merknader. Hvis x er en egenvektor med egenverdi λ er naturligvis cx også det, for enhver $c \neq 0$. Mer generelt, dersom $x_1, \dots, x_k$ er egenvektorer med *den samme* egenverdien λ er også $c_1x_1 + \dots + c_kx_k$ det. Så vi ser at mengden av alle egenvektorer som tilhører en egenverdi (pluss nullvektoren) er et vektorrom. Dette kalles *egenrommet* til den gitte egenverdien.

Definisjon Dersom λ er en egenverdi til A , er den *geometriske multiplisiteten* til λ lik dimensjonen til egenrommet til λ .

Den geometriske multiplisiteten til λ er altså lik antall lineært uavhengige egenvektorer.

Videre vet vi at dersom x_1, x_2 er egenvektorer med egenverdier λ_1, λ_2 respektivt, må x_1 og x_2 være lineært uavhengige. Faktisk, de må være ortogonale!

Så, hvordan finner vi egenverdiene? Fra $Ax = \lambda x$ vet vi at $(A - \lambda I_n)x = 0$. Siden $x \neq 0$ betyr dette at $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$, og dermed må vi ha $\det(A - \lambda I_n) = 0$ fra teoremet i forrige kapittel. Denne determinanten er faktisk et polynom i λ (hvis du ganger ut hele smørja) av grad n . Egenverdiene er røttene i dette polynomet! Så vi ser at det å finne egenverdier er egentlig ikke noe annet enn å finne røttene i et polynom.

Straks du har funnet egenverdiene, finner du matrisen $A - \lambda I_n$, og da er egenvektorene til λ de samme vektorene som løser systemet $(A - \lambda I_n)x = 0$ (faktisk er egenrommet til λ lik $\ker(A - \lambda I_n)$).

Definisjon Dersom λ_i er en egenverdi til A , er den *algebraiske multiplisiteten* til λ_i lik dens orden som rot i $\det(A - \lambda I_n)$. Med andre ord, dersom $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_i)^k Q(\lambda)$, der $Q(\lambda)$ er et polynom slik at $Q(\lambda_i) \neq 0$, så har λ_i algebraisk multiplisitet k .

Hvorfor dette maset om egenverdier, tenker du sikkert. Vel, dersom A har den (ikke uvanlige) egenskapen at alle egenverdiene har *lik* geometrisk og algebraisk multiplisitet, er A det vi kaller *diagonaliserbar*.

Anta vi har (ikke nødvendigvis distinkte) egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Siden geometrisk multiplisitet er lik algebraisk, må vi også ha n lineært uavhengige egenvektorer $x_1, \dots, x_n$ slik at $Ax_i = \lambda_i x_i$. Dersom vi nå definerer matrisene

$$S = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ser vi at

$$AS = [Ax_1 \quad Ax_2 \quad \cdots \quad Ax_n] = [\lambda_1 x_1 \quad \lambda_2 x_2 \quad \cdots \quad \lambda_n x_n] = S\Lambda.$$

Siden alle egenvektorene er lineært uavhengige er S invertibel, så vi får $A = S\Lambda S^{-1}$. Siden Λ er en diagonal matrise, sier vi at A er diagonaliserbar. Dette gjør det for eksempel lett å regne ut potenser av A , fordi $A^k = (S\Lambda S^{-1})^k = S\Lambda^k S^{-1}$. Men Λ^k er enkel å regne ut:

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Vi kan potensielt spare mye regnekraft på å beregne matrisepotenser på denne måten.

0.6 Relasjoner mellom trasen, determinanten, og egenverdiene

Trasen til en matrise, $\text{tr } A$ er definert som summen av diagonalelementene. Avslutningsvis nevner vi to hendige relasjoner mellom trasen, determinanten og egenverdiene. Dersom A har egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ har vi

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

0.7 Oppgaver

1. La V være mengden av alle aritmetiske følger $(a, a+k, a+2k, \dots)$ med elementvis addisjon og skalarmultiplikasjon. V er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Hva er $\dim V$?
2. $L^1(\mathbb{R}^n)$ er mengden av alle funksjoner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Vis at $\dim L^1(\mathbb{R}^n) = \infty$.

3. Vi ser på vektorrommet $V = \mathbb{R}$ over $K = \mathbb{Q}$ (altså, vektorene er reelle tall, og skalarene er rasjonale).
 - (a) Vis at $\dim V = \infty$.
 - (b) Finn et todimensjonalt underrom, og vis at det finnes en funksjon f på dette underrommet slik at $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for alle x, y , men $f(x) \neq cx$. (Slike funksjoner finnes ikke hvis vi tillater reelle skalarer.)
4. La $x_1, \dots, x_n$ være vektorer som er parvis ortogonale. Vis at de er lineært uavhengige.
5. La A og B være kvadratiske matriser slik at $A + B + AB = 0$. Vis at $AB = BA$.
6. Vis at det ikke finnes to forskjellige funksjoner som oppfyller kravene til determinanten.
7. La A være en invertibel heltallsmatrise slik at A^{-1} også er en heltallsmatrise. Vis at $\det(A) = \pm 1$.
8. Hvis $\det(A) > 0$, vis at det finnes en kontinuerlig 'sti' av matriser $A(t)$ for $0 \leq t \leq 1$ slik at $A(0) = A$, $A(1) = I_n$ og $\det(A(t)) > 0$ for alle t .
9. Dersom x_1, x_2 er egenvektorer til en matrise A med forskjellige egenverdier, vis at x_1 og x_2 er ortogonale.
10. La A være en $n \times n$ -matrise med reelle, positive egenverdier. Vis at $\operatorname{tr} A \geq n \det(A)^{1/n}$.
11. For en singular matrise A , vis at egenverdien $\lambda = 0$ har geometrisk multiplisitet $n - k$ hvis og bare hvis $\operatorname{rank} A = k$.
12. Finnes det en kompleks matrise A slik at $A + cI_n$ er invertibel for alle $c \in \mathbb{C}$? Finnes det en reell A med denne egenskapen? Enn hvis $c \in \mathbb{R}$?
13. La A være en $n \times n$ -matrise slik at $A^2 = -I_n$. Vis at n er et partall.