Grupper og kosett

Introduksjon

I denne oppgaven skal vi se på kosett i abelske grupper, og hva man kan bruke dem til. Vi starter med en bestemt gruppe G, og en bestemt undergruppe $H \subseteq G$, og ser på kosettene til forskjellige elementer i G sammen med undergruppen H. Vi definerer da kosettene slik:

Definisjon: *Kosettet* som inneholder a til undergruppen H er settet $aH = \{a * h | h \in H\}$

Her er $*$ gruppevirkningen i G. Disse kosettene kan vi nå leke rundt med, og du vil kanskje oppdage iløpet av oppgaven at de er et ganske kraftig redskap.

Eksempler

Før vi presenterer problemet, gir vi et eksempel på hvordan vi finner kosett, og hva vi kan bruke dem til. Først ser vi på kosettene til undergruppen $3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ med gruppevirkningen *addisjon*:

$$3\mathbb{Z} = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$$

som faktisk er en av kosettene, med $a = 0$. Neste kosett med $a = 1$:

$$1 + 3\mathbb{Z} = \{..., -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\}$$

Her ser vi at dette kosettet bare inneholder elementer som ikke var i $3\mathbb{Z}$, men vi mangler noen tall fra $\mathbb{Z}$, så vi ser på kosettet med $a = 2$:

$$2 + 3\mathbb{Z} = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$$

Med litt overblikk ser vi at dette er alle tallene i $\mathbb{Z}$, altså at dette er en inndeling av $\mathbb{Z}$ i tre deler. Vi ser også at denne inndelingen henger tett sammen med *ekvivalens modulo 3*. Dersom vi erstatter 3 med n, pleier vi å kalle disse kosettene for *kosettene modulo* $n\mathbb{Z}$.

Vi ser også at dersom undergruppen H er veldig liten i forhold til G, blir det mange kosett, og dersom H er nesten like stor som G blir det få kosett. H bør altså være passe stor.

Problemet

Skriv ned gruppetabellen til $\mathbb{Z}_3$ under addisjon.

Se på gruppen $G = \mathbb{Z}_6$ og undergruppen $H = \{0, 3\}$ under addisjon. Finn kosettene, og lag en gruppetabell for $\mathbb{Z}_6$ med elementene i rekkefølge slik at de to første er i samme kosett, de to neste er i samme kosett osv. bortover aksene. Fargelegg elementer som er i samme kosett med samme farge (i hele tabellen). Ser du et mønster? Sammenlign med gruppetabellen til $\mathbb{Z}_3$. Ser du noen likheter?

Du kan nå sette opp to *generelle hypoteser*. For det første kan du sette opp en sammenheng mellom antall elementer i H og antall elementer i et kosett til H. For det andre kan du sette opp en sammenheng mellom antall elementer i H, og antall elementer i G. Forsøk å bevise disse to hypotesene i denne rekkefølgen, og bruk den første når du skal vise den andre.

Tips

Når du skal bevise at to mengder er like store, kan du forsøke å sette opp en *en-til-en funksjon* mellom de to mengdene.

Vi gir også en ny utfordring: kan du på noen måte betrakte *kosettene* til H som elementer i en gruppe? Hvordan blir gruppevirkningen? Hvilken gruppe ser dette ut som?