Min første NMC-oppgave

Introduksjon

Her presenterer vi en oppgave som tidligere har vært gitt som del av den nordiske lagkonkurransen i matematikk, NMC. Den handler om elementer i en gruppe, så det kan derfor være instruktivt å repetere hva vi vet om grupper:

Lukket: En gruppe $(G, \cdot)$ er *lukket* under operasjonen $\cdot$, dvs. du aldri havner utenfor G.

Assosiativ: Operasjonen $\cdot$ er *assosiativ*, dvs. at $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ for alle $a, b, c \in G$.

Identitet: Det finnes en *identitet* e i gruppen slik at $e \cdot g = g \cdot e = g$ for alle $g \in G$.

Invers: For alle $g \in G$ finnes det en *invers* g^{-1} slik at $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

NB: Når vi tidligere har diskutert grupper, har vi alltid snakket om *abelske* grupper, dvs. grupper der $a \cdot b = b \cdot a$. Dette er ikke alltid tilfelle i en generell gruppe, og i denne oppgaven kan du ***ikke*** bruke denne egenskapen!

Problemet

Anta at $x, y \in G$ og at G er en gruppe med en eller annen operasjon, som vi skriver $x \cdot y := xy$. Anta også at $y^{-1}xy = x^k$ for alle $x, y \in G$.

Vis at

$$\mathbf{y^{-r} x^s y^r = x^{sk^r}}.$$

Tips

Hint:

- Forsøk først å omskrive $y^{-1}x^s y$. (Dette hintet ble også gitt i konkurransen!)
- Det kan ofte være lurt når du skal bevise en sammenheng å starte i begge ender og jobbe seg mot midten.
- Husker du fra Matte 3 hvordan man kunne bruke diagonalisering til å opphøye matriser i store tall?