Løst og fast
om Selbergs sporformel

Perleforedrag
25. april 2008

# SITUASJONEN

$$\mathbb{H} = \{x+iy : y>0\}$$

(øvre komplekse halvplan)

Her virker gruppen av rasjonale lineære transformasjoner:

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \sigma : z \to \frac{az+b}{cz+d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right\}$$

$$PSL(2,\mathbb{R}) \simeq SL(2,\mathbb{R}) \big/ \{I,-I\}$$

der $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Gamma$ <u>diskret</u> undergruppe av $PSL(2, \mathbb{R})$. Dvs.

$$\{\gamma z : \gamma \in \Gamma\} \; ; \quad z \in \mathbb{H},$$

har ingen opphopningspunkter i $\mathbb{H}$.

<u>Antagelse:</u>

$\Gamma$ består av <u>hyperbolske</u> elementer. Dvs. for $\gamma \neq I$ har $\gamma$ to distinkte reelle egenverdier $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

Hyperbolsk metrikk i $\mathbb{H}$:

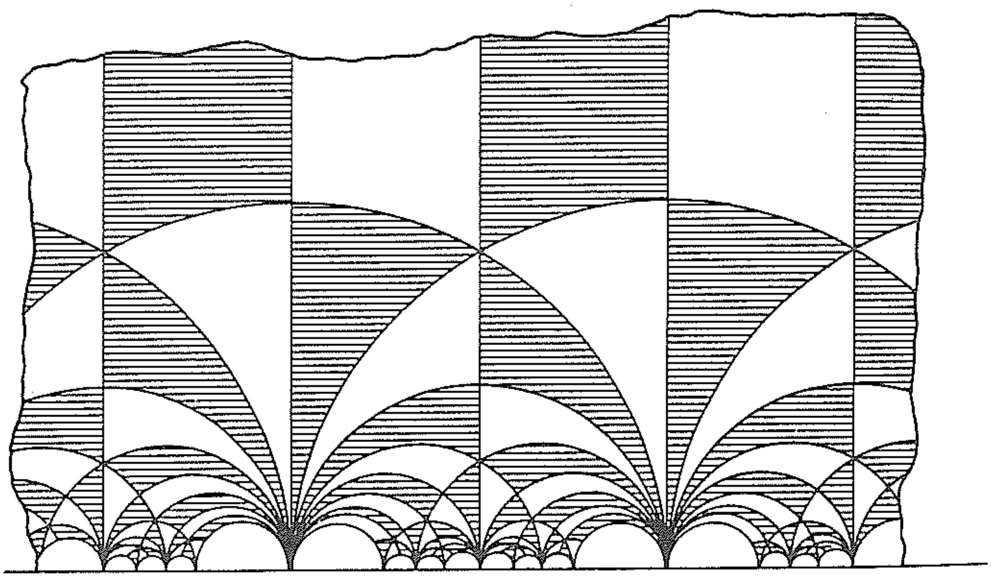
$$\boxed{ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}} \quad (z = x + iy,\ y > 0)$$

Areal:

$$\boxed{d\omega = \frac{dx\,dy}{y^2}}$$

Avstanden $d(z_1, z_2)$ mellom to punkter $z_1, z_2$ i $\mathbb{H}$ tilfredsstiller:

$$\boxed{\cosh d(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 y_1 y_2}}$$

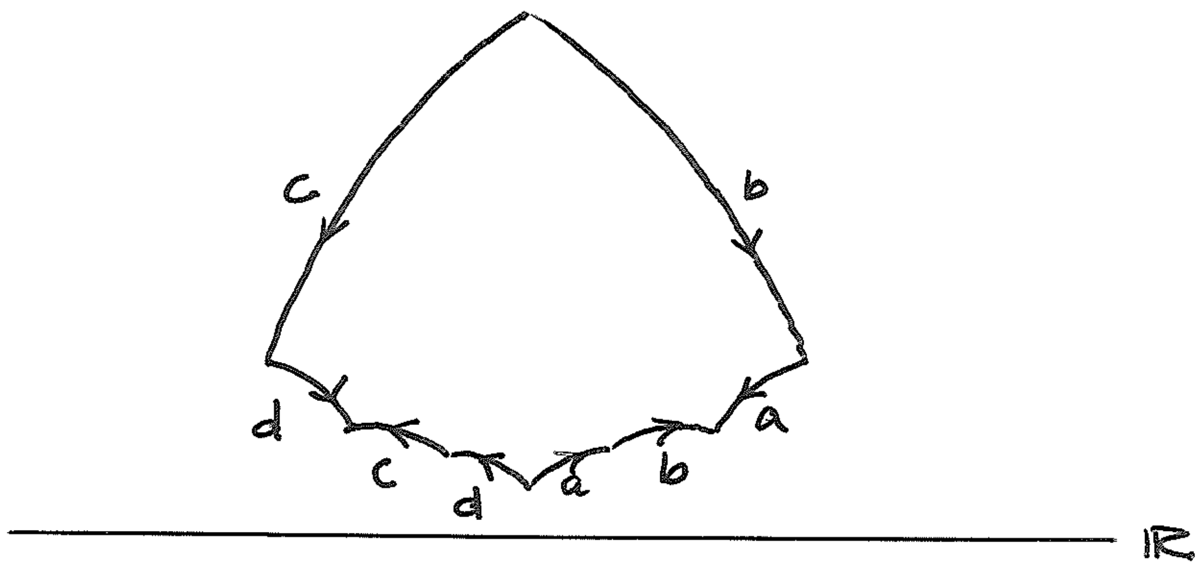


Geodetiske kurver i $\mathbb{H}$

$F$ fundamentalområde for $\Gamma$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & F \cap \gamma F = \phi \quad ; \gamma \neq I \\ 2) & \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F = \mathbb{H} \end{array}}$$

Eks. på $F$ med $g = 2$:



Laplace - Beltrami - operatoren på $\mathbb{H}$ (og $F$):

$$\boxed{D = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}$$

$PSL(2,\mathbb{R})$ - invarians ($\sigma \in PSL(2,\mathbb{R})$):

$$\boxed{\begin{aligned} & d(\sigma z_1, \sigma z_2) = d(z_1, z_2) \\ & \int_{\mathbb{H}} f(\sigma z)\, d\omega(z) = \int_{\mathbb{H}} f(z)\, d\omega(z) \\ & D(f_\sigma) = (Df)_\sigma \;;\quad f_\sigma(z) = f(\sigma z) \end{aligned}}$$

## Spektralteori for automorfe funksjoner

$$\mathcal{H} = L^2(F, d\omega) \simeq \{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \,;\, f(\gamma z) = f(z) \quad \int_F |f|^2 d\omega < \infty \}$$

<u>Teorem</u> D er essensielt selv-adjungert på $\mathcal{H}$, (d.v.s. D har en entydig maks. selv-adjungert utvidelse). Egenverdiproblemet

$$D\varphi + \lambda\varphi = 0 \qquad (\varphi \in \mathcal{H})$$

er diskret: det finnes en tellbar følge av egenfunksjoner $\{\varphi_{n_i}\} \subseteq \mathcal{H}$; $n = 0, 1, 2, \cdots$ med tilhørende egenverdier

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots ; \; \lambda_n \uparrow \infty$$

slik at $D\varphi_{n_i} + \lambda_n \varphi_{n_i} = 0$ for alle $n$.

Egenmangfoldighetene har endelig dimensjon, vi har

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

$\{\varphi_n\}$ danner et fullstendig ortonormalt system, vi har

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} [\varphi_{n_i}]$$

$\lambda_0 = 0$ er en enkel egenverdi, $\varphi_0(z) = \omega(F)^{-1/2}$.

# Den Selbergske integral-operator.

Punkt-par invariant:
funksjon $k : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$
som oppfyller

$$k(\sigma z, \sigma w) = k(z, w)$$

$$(\sigma \in PSL(2, \mathbb{R}),\ z, w \in \mathbb{H})$$

## Konstruksjon av punkt-par invarianter:

Ta $\varphi \in C_c[0,\infty)$ vilkårlig, def.

$$k(z,w) = \varphi\left(\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}\right)$$

for $z, w \in \mathbb{H}$. Siden vi har

$$\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w} = \cosh d(z,w) + 2$$

og metrikken $d$ er $PSL(2,\mathbb{R})$-invariant blir $k$ som ønsket.

For en punkt-par invariant $k$ definer

$$\tilde{k}(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma w)$$

$\tilde{k}$ blir $\Gamma$-invariant i begge variable og definerer en integral-operator $K$ i $\mathcal{H}$:

$$\boxed{(Kf)(z) = \int_F \tilde{k}(z,w)f(w)\,d\omega(w)}$$

Det finnes en <u>hel</u> funksjon $H$ slik at $K = H(D)$, dvs.

$$K\varphi_{m_i} = H(\lambda_m)\varphi_{m_i} \;;\; m = 0, 1, \dots$$

Sett $\lambda_m = \frac{1}{4} + r_m^2 \;;\; m = 0, 1, \dots$

og $h(r) = H\left(\frac{1}{4} + r^2\right)$, slik at

$$K\varphi_{m_i} = h(r_m)\varphi_{m_i} \;;\; m = 0, 1, \dots$$

Den <u>generelle sporformel</u>:

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} h(r_m) = \int_F \tilde{k}(z, z)\, d\omega(z)}$$

## Sammenhengen mellom funksjonene k og h.

Start med $\varphi \in C_c^2[0,\infty)$.

$$k(z,w) = \varphi\left(\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w}\right); z, w \in \mathbb{H}$$

Definer:

(1) $$Q(x) = \int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt \; ; \; x \geq 0$$

(2) $$g(u) = Q(2\cosh u - 2) \; ; u \in \mathbb{R}$$

(3) $$h(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iru}\,du$$

Da er

(4) $$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) e^{-iru}\,dr$$

(5) $$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w-t}} \; ; \; t \geq 0$$

(Abels integraltransform)

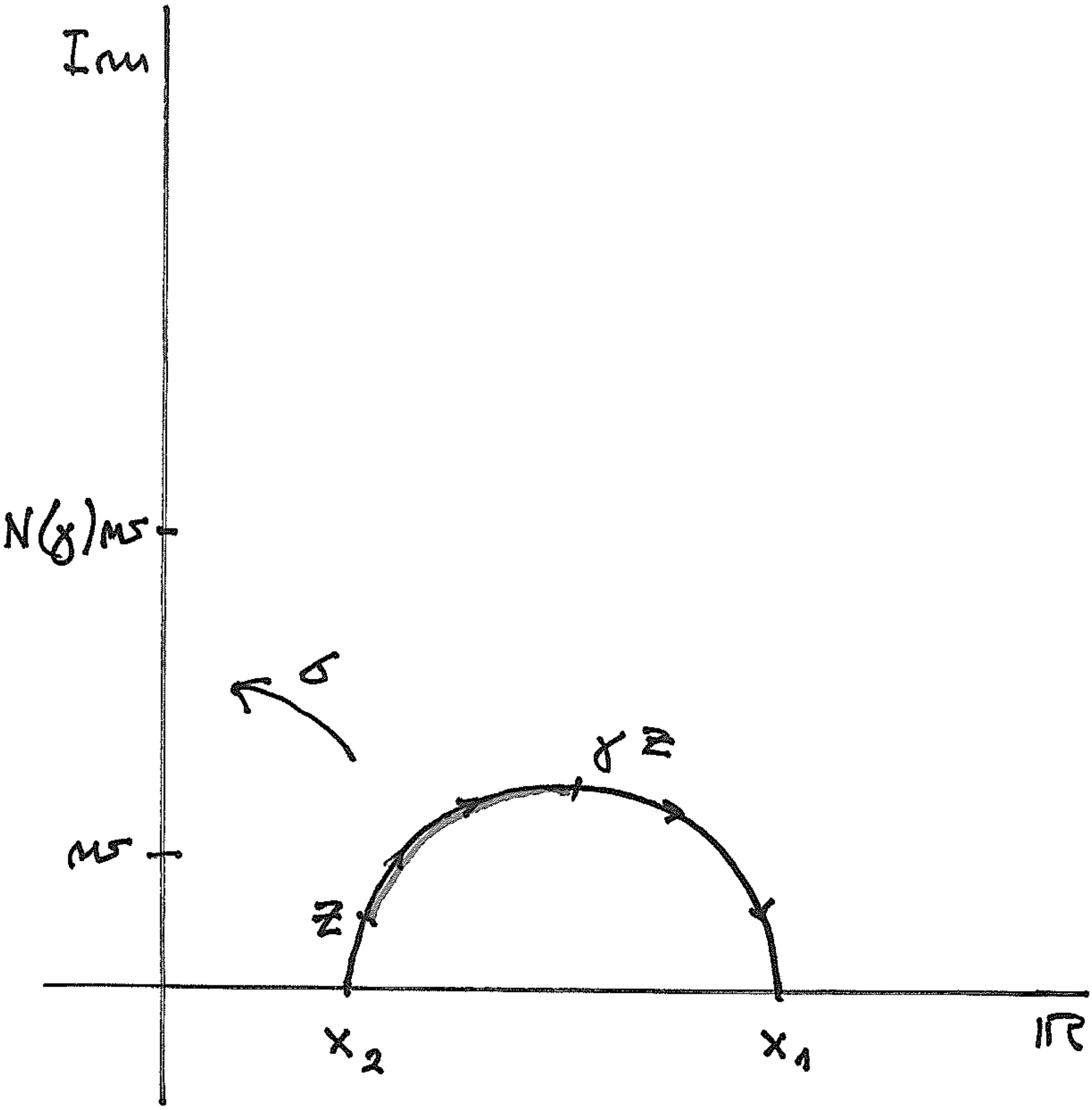
## Geometri

Hver $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq I$ har (som rasjonal lineær transformasjon) to reelle fikspunkt $x_1 > x_2$ (kan ha $x_1 = \infty$). Da er $\gamma$ konjugert til en "strekking" $\nu : z \to \lambda_1^2 z$ (i.e. $\gamma = \sigma^{-1} \nu \sigma$,

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} \begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix}$$

$\sigma : x_2 \to 0$, $x_1 \to \infty$).

Sett $N(\gamma) = \lambda_1^2 =$ normen til $\gamma$.




**Theorem.** $\ln N(\gamma) = \min_{z \in \mathbb{H}} d(z, \gamma z)$

$Z(\gamma)$ = sentralisatoren i $\Gamma$ til et element $\gamma \in \Gamma$

$Z(\gamma)$ er en uendelig syklisk gruppe, generert av et <u>primitivt</u> <u>element</u> $\gamma_0$ ($\gamma_0$ er konjugert en <u>minimal</u> strekning $\mu_0 : z \to N(\gamma_0) z$, dvs. $N(\gamma_0) \leq N(\gamma')$ for alle $\gamma' \in Z(\gamma)$)

<u>Beregning av</u> $\underline{\int_F \tilde{k}(z,z)\,d\omega(z)}$. (Skisse).

Etter def. av $\tilde{k}$:

$$\int_F \tilde{k}(z,z)\,d\omega(z) = \int_F \sum_{\gamma\in\Gamma} k(\gamma z, z)\,d\omega(z)$$

$$= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_F k(\gamma z, z)\,d\omega(z)$$

$$= \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \sum_{\mu\in\{\gamma\}_\Gamma} \int_F k(\mu z, z)\,d\omega(z),$$

der $\{\gamma\}_\Gamma$ betegner distinkte konjugasjonsklasser i $\Gamma$ med representativt element $\gamma$. For $\mu\in\{\gamma\}_\Gamma$ har vi $\mu = \sigma^{-1}\gamma\sigma$ ; $\sigma\in\Gamma$.

NB! $\sigma^{-1}\gamma\sigma = \rho^{-1}\gamma\rho \iff \sigma\in Z(\gamma)\rho$
($Z(\gamma)$ = sentralisatoren til $\gamma$ i $\Gamma$)

Ovenstående kan dermed skrives:

$$\sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \sum_{\sigma\in Z(\gamma)\backslash\Gamma} \int_F k(\sigma^{-1}\gamma\sigma z, z)\,d\omega(z)$$

$$= \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \sum_{\sigma\in Z(\gamma)\backslash\Gamma} \int_{\sigma(F)} k(\gamma w, w)\,d\omega(w)$$

$$= \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \int_{F_\gamma} k(\gamma w, w)\,d\omega(w),$$

$$F_\gamma = \bigcup_{\sigma\in Z(\gamma)\backslash\Gamma} \sigma(F)$$

$H = \sigma^{-1} Z(\gamma) \sigma$ har fund. omr.:

$$E = \{w : 1 \leq \operatorname{Im} w < N(\gamma_0)\}$$

(Vi har $\mu_0 z = N(\gamma_0) z$ hvis $\mu_0 = \sigma^{-1}\gamma_0\sigma$, $\mu \in H \Rightarrow \mu = \mu_0^k$ ; $k \in \mathbb{Z}$. Heraf:

1) $E \cap \mu E = \phi$ ; $\mu \neq I$ ; $\mu \in H$

2) $\bigcup_{\mu \in H} \mu E = \mathbb{H}$

som viser at $E$ er et fundamentalområde for $H$ ).

$F_\gamma = \sigma E$ blir nå et egnet fundamentalområde for $Z(\gamma)$:

For $\gamma \neq I$, $z = \sigma w$ :

$$\int_{F_\gamma} k(\gamma z, z)\, d\omega(z)$$

$$= \int_E k(\sigma^{-1}\gamma\sigma w, w)\, d\omega(w)$$

$$= \int_E k(N(\gamma) w, w)\, d\omega(w)$$

$$= \int_1^{N(\gamma_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{(N(\gamma)-1)^2}{N} \cdot \frac{x^2+y^2}{y^2}\right) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

[Videre regning (via transf. pkt. 8)]

$$= \frac{\ln N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}}\, g(\ln N(\gamma))$$

<u>Bidraget fra $\gamma = I$ i</u> $\sum\limits_{\{\gamma\}_\Gamma}$ :

For $\gamma = I$ er $Z(\gamma) = \Gamma$ og $F_\gamma = F$

Bidraget fra det korresponderende leddet i summen blir derfor

$$\int_F k(z,z)\,d\omega(z) = \varphi(0)\,\omega(F)$$

$$= \frac{\omega(F)}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r\,h(r)\tanh(\pi r)\,dr$$

<u>Teorem</u> La $S_\varepsilon = \{ r \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, r| < \frac{1}{2} + \varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$ og la $h : S_\varepsilon \to \mathbb{C}$ være en like analytisk funksjon som oppfyller

$$|h(r)| \le \frac{M}{(1+|r|^2)^{1+\varepsilon}}$$

La
$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\, e^{-iru}\, dr$$

Egenverdiene for D som før:

$$0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots ; \quad \lambda_n \uparrow \infty$$

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \quad ; \quad \mathrm{Arg}\, r_n \in \{0, -\tfrac{\pi}{2}\}$$

Da er

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) &= \frac{\omega(F)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r\, h(r) \tanh(\pi r)\, dr \\ &\quad + \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \\ (\text{dist.},\ \gamma \neq I)}} \frac{\ln N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}}\, g(\ln N(\gamma)) \end{aligned}}$$

Begge rekker og integralet konvergerer absolutt og er lik sporet til operatoren $K = \tilde{h}(D)$.

# Assymptotiske formler

$$N(x) = \# \{ \lambda_n : \lambda_n \le x \}$$

$$\pi_0(x) = \# \{ \gamma_0 : N(\gamma_0) \le x \}$$

Velg $h(r) = e^{-(1/4 + r^2)t}$ ; $t > 0$

$$\Rightarrow g(u) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4t}}$$

Innsetting i TF gir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{\omega(F)}{4\pi t} + O(1) \quad (t \to 0^+)$$

Klassiske Tauber-satser (Karamata, Wiener-Ikehara) gir

$$\boxed{N(x) \sim \frac{\omega(F)}{4\pi} x} \quad \text{(Weyls sats)}$$

Analogt, ved å la $t \to \infty$ i TF får man

$$\boxed{\pi_0(x) \sim \mathrm{li}\, x}$$

$$\left( \mathrm{li}\, x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \right)$$

## Riemanns zeta-funksjon

$$\boxed{\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}} \; ; \operatorname{Re} s > 1$$

hvor produktet er tatt over alle primtall. Herav:

$$\boxed{\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}} \quad ; \operatorname{Re} s > 1$$

der $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{hvis } n = p^k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

$\zeta(s)$ utvides analytisk til $\mathbb{C}$, enkel pol i $s = 1$. Funksjonalligning:

$$\zeta(s) = \chi(s)\,\zeta(1-s)$$

der $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$

$\zeta(-2n) = 0 \; ; \; n = 1, 2, \dots$ er <u>trivielle</u> nullpunkter for $\zeta(s)$.
<u>Kritiske stripe</u>: $\{s : 0 \le \operatorname{Re} s \le 1\}$

## Riemanns hypotese:

$\operatorname{Re} \rho = \frac{1}{2}$ for alle nullpkt $\rho$ for $\zeta(s)$ i den kritiske stripen.

<u>Riemann - von Mangoldt:</u>

$$\boxed{\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}}$$

hvor det summeres over alle ikke-trivielle nullpunkter $\rho$ for $\zeta(s)$.

<u>Weil's eksplisitte formel:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{\gamma} h(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} ir\right) dr \\ &+ h\left(\frac{i}{2}\right) + h\left(-\frac{i}{2}\right) - g(0) \ln \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} g(\ln n)\end{aligned}}$$

Her er $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ ; $\gamma \in \mathbb{C}$ ; $h$ og $g$ som i traseformelen.

<u>Teorem (Weil)</u> RH $\Longleftrightarrow$ høyre side ovenfor er <u>positiv</u> for alle $g$ av formen

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(t+u) \overline{g_0(t)} \, dt$$

der $g_0$ er like.

<u>Primtallsatsen</u> (Hadamard - de la Vallé-Poussin, 1896)

$$\pi(x) \sim li \, x$$

# Resultater om $\pi(x)$

La $\Theta$ være minste øvre skranke for den reelle del av nullpunktene til $\zeta(s)$.

**Sats 1** $\pi(x) = li\, x + O(x^{\Theta} \ln x)$

RH gir $\Theta = \frac{1}{2}$ som er det best mulige resultat.

**Sats 2** (Littlewood)

$$\pi(x) = li\, x + \Omega_{\pm}\left(x^{1/2} \frac{\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

$$\ulcorner \quad f(x) = \Omega_{+}(g(x)) \Longleftrightarrow \limsup \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$f(x) = \Omega_{-}(g(x)) \Longleftrightarrow \liminf \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad \lrcorner$$

## Weils eksplisitte formel:

$$\sum_{\gamma} h(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ir\right)dr$$

$$+\,h\left(\frac{i}{2}\right)+h\left(-\frac{i}{2}\right)-g(0)\ln\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\,g(\ln n)$$

( $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ , $\rho$ nullpkt. i $\zeta(s)$ )

## Selbergs spor formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \frac{\omega(F)}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r\,h(r)\tanh(\pi r)\,dr$$

$$+\sum_{\{\gamma\}_\Gamma}\frac{\Lambda(\gamma)}{\sqrt{N(\gamma)}}\,g(\ln N(\gamma))$$

når vi setter $\Lambda(\gamma) = \dfrac{\ln N(\gamma_0)}{1-N(\gamma)^{-1}}$

# Selbergs zeta-funksjon

$$\boxed{Z(s) = \prod_{\substack{\{\gamma_0\} \\ (\text{dist.})}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - N(\gamma_0)^{-s-k}\right)} \; ; \operatorname{Re} s > 1$$

Vi har
$$\frac{Z'(s)}{Z(s)} = \sum_{\{\gamma\}} \frac{\Lambda(\gamma)}{N(\gamma)^s} \quad ; \operatorname{Re} s > 1$$

Egenskaper:

(1) $Z(s)$ kan utv. til en hel funksj.
Funksjonalligning:
$$Z(s) = \varkappa(s)\, Z(1-s)$$
der $\displaystyle \varkappa(s) = \exp\left[\omega(F) \int_0^{s-1/2} r \tan(\pi r)\, dr\right]$

(2) "Trivielle" nullpunkter $s = -k$, $k = 1, 2, \cdots$ med multiplisitet $(2g-2)(2k+1)$

(3) Ikke-trivielle nullpunkter er alle av formen $s_n = \frac{1}{2} + i r_n$, der $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$. Multiplisiteten av $s_n$ faller sammen med dimensjonen til egenmangfoldigheten til $\lambda_n$.

## Referanser

A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47 - 87.

A. B. Venkov: Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics. Russ. Math. Surveys 34:3 (1979) 79 - 153

J. Elstrodt: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen. Jber. d. Dt. Math. Verein 83 (1981) 45 - 77

D. Hejhal: The Selberg trace formula for PSL(2, R). Vol. I. Lecture notes, Springer 1976, Vol. 548